

I Esonero di Meccanica Analitica e Statistica: 21-2-2006

E. Scoppola

Soluzione

- 1) Denotando con $\dot{\phi}$ la velocità angolare del disco attorno al suo centro, la condizione di rotolamento è data da: $(R+r)\dot{\theta} = r\dot{\phi}$. La lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\left(\frac{R+r}{r}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \quad (1)$$

$$+Mg(R+r)\cos\theta - \frac{1}{2}K\left[(R+r)^2\cos^2\theta + (x - (R+r)\sin\theta)^2\right] = \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2}M(R+r)^2\frac{3}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + Mg(R+r)\cos\theta - \frac{1}{2}K\left[x^2 - 2x(R+r)\sin\theta\right] \quad (3)$$

Le equazioni del moto sono:

$$M(R+r)\frac{3}{2}\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta + Kx\cos\theta \quad (4)$$

$$m\ddot{x} = -Kx + K(R+r)\sin\theta \quad (5)$$

- 2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = Mg(R+r)\sin\theta - Kx(R+r)\cos\theta = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kx - K(R+r)\sin\theta = 0 \quad (7)$$

da cui

$$x = (R+r)\sin\theta \quad \sin\theta(R+r)\left[Mg - K(R+r)\cos\theta\right] = 0 \quad (8)$$

e dunque i punti critici:

$$(\theta_1, x_1) = (0, 0) \quad (\theta_2, x_2) = (\pi, 0) \quad (9)$$

e, se $\lambda = \frac{Mg}{K(R+r)} \leq 1$ si hanno anche i punti

$$(\theta_{3,4}, x_{3,4}) = (\arccos\lambda, (R+r)\sin\theta_{3,4}) \quad (10)$$

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta, x) = \begin{pmatrix} Mg(R+r)\cos\theta + Kx(R+r)\sin\theta & -K(R+r)\cos\theta \\ -K(R+r)\cos\theta & K \end{pmatrix} \quad (11)$$

nei diversi punti critici.

$$V''(0, 0) = \begin{pmatrix} Mg(R+r) & -K(R+r) \\ -K(R+r) & K \end{pmatrix} \quad (12)$$

ha traccia positiva e determinante positivo se $\lambda > 1$ e negativo se $\lambda < 1$ dunque il punto $(0, 0)$ è stabile se $\lambda > 1$ e instabile se $\lambda < 1$.

$$V''(\pi, 0) = \begin{pmatrix} -Mg(R+r) & K(R+r) \\ K(R+r) & K \end{pmatrix} \quad (13)$$

ha determinante negativo, dunque il punto $(\pi, 0)$ è instabile.

$$aV''(\theta_3, 4, x_{3,4}) = \begin{pmatrix} Mg(R+r)\lambda + K(R+r)^2(1-\lambda^2) & -K(R+r)\lambda \\ -K(R+r)\lambda & K \end{pmatrix} \quad (14)$$

che per $\lambda < 1$ ha traccia e determinante positivi poichè $\det V''(\theta_3, 4, x_{3,4}) = K^2(R+r)^2 - (Mg)^2$ dunque i punti $(\theta_3, 4, x_{3,4})$ che sono di equilibrio solo se $\lambda < 1$ sono stabili e nel caso $\lambda = 1$ essi coincidono con $(0, 0)$ che per continuità è stabile in questo caso.

- 3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(0, 0)$ nel caso $\lambda > 1$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (\theta, x)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q}, V''(0, 0)\mathbf{q}) \quad (15)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M(R+r)^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad (16)$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(\theta_1, x_1) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} Mg(R+r) - \omega^2 \frac{3}{2}M(R+r)^2 & -K(R+r) \\ -K(R+r) & K - \omega^2 m \end{vmatrix} \quad (17)$$

- 4) Se $x = 0$ il problema è unidimensionale con potenziale $V(\theta) = -Mg(R+r)\cos\theta$ che ha moti rotatori se l'energia totale E verifica la condizione

$$E = \frac{1}{2}M(R+r)^2\frac{3}{2}\dot{\theta}^2 - Mg(R+r) > Mg(R+r) \quad (18)$$

da cui il modulo della velocità iniziale del punto C deve essere $v_C(0) = (R+r)|\dot{\theta}| > (R+r)\sqrt{\frac{8g}{3(R+r)}}$

- 5) Se il piano è posto in rotazione, nel sistema solidale con Π devo considerare in aggiunta al potenziale considerato nel punto precedente anche il termine centrifugo $V_{centr} = -\frac{1}{2}M\omega^2(R+r)^2 \sin^2 \theta$. Determinando i punti critici di questo nuovo potenziale otteniamo:

$$V'(\theta) = M(R+r) \sin \theta [g - \omega^2(R+r) \cos \theta] = 0 \quad (19)$$

cioè i punti critici $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e se $\lambda' = \frac{g}{\omega^2(R+r)} < 1$ anche $\theta_{3,4} = \arccos \lambda'$. Calcolando $\frac{V''(\theta)}{M(R+r)} = \cos \theta [g - \omega^2(R+r) \cos \theta] + \sin^2 \theta \omega^2(R+r)$ otteniamo che $\frac{V''(0)}{M(R+r)} = [g - \omega^2(R+r)]$ positivo e dunque punto di equilibrio stabile se $\lambda' > 1$ e negativo e dunque instabile se $\lambda' < 1$. $\frac{V''(\pi)}{M(R+r)} = -[g + \omega^2(R+r)]$ negativo e dunque punto di equilibrio instabile. Se $\lambda' < 1$ abbiamo $\frac{V''(\theta_{3,4})}{M(R+r)} = \sin^2 \theta_{3,4} \omega^2(R+r)$ che è positivo e dunque punti di equilibrio stabili. Nel caso $\lambda' = 1$ essi sono stabili e coincidono con 0.