II Esonero di Meccanica Analitica e Statistica: 24-3-2006

E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1) Abbiamo $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^2}$ da cui otteniamo $\dot{q} = pq^2$ e quindi

$$H(p,q) = \frac{p^2 q^2}{2} + \log q \tag{1}$$

2)

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -p^2 q - \frac{1}{q} \tag{2}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = pq^2 \tag{3}$$

3)

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{q} \tag{4}$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \log q \tag{5}$$

da cui otteniamo la trasformazione canonica

$$P(p,q) = pq \quad Q(p,q) = \log q \tag{6}$$

4) La nuova hamiltoniana è data da $K(P,Q) = \frac{P^2}{2} + Q$ e le nuove equazioni del moto sono:

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -1 \tag{7}$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = P \tag{8}$$

da cui otteniamo

$$P(t) = P(0) - t, \quad Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{t^2}{2} \tag{9}$$

con dati iniziali $Q(0) = \log 1 = 0$, $P(0) = 0$ da cui otteniamo

$$q(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad p(t) = -te^{\frac{t^2}{2}} \tag{10}$$

Soluzione esercizio 2

1) $Z^c = \frac{1}{N!}(Z_1)^N$ con

$$Z_1 = \int_{-\infty}^{\infty} E^{-\beta \frac{p^2}{2}} dp \int_0^L e^{-\beta q} dq = (\frac{2\pi}{\beta})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta L}) \tag{11}$$

2)

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z^c = \frac{3}{2} NKT - NL \frac{1}{e^{\beta L} - 1} \tag{12}$$

3)

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial L} \log Z^c = N \frac{1}{e^{\beta L} - 1} \tag{13}$$