Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 27-3-2006

E. Scoppola, V.Alfi

Soluzione esercizio 1

1) A causa di un errore di battitura nel testo la lunghezza OG risulta essere $OG = l\frac{\sqrt{11}}{2}$ e per semplicità verrà denotata r nel testo. Usando il teorema di Koenig l'energia cinetica dell'asta è $T_{AB} = \frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}Ml^2\frac{17}{6}\dot{\theta}^2$. L'energia potenziale gravitazionale è: $V_g = Mgr\sin\theta$ e quella elastica a meno di costanti $V_{el} = \frac{K}{2}(x^2 - 2xr\cos\theta)$ La lagrangiana dunque è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\frac{17}{6}\dot{\theta}^2 - Mgr\sin\theta - \frac{K}{2}(x^2 - 2xr\cos\theta) \tag{1}$$

Le equazioni del moto sono:

$$Ml^2\frac{17}{6}\ddot{\theta} = -Mgr\cos\theta - Kxr\sin\theta \tag{2}$$

$$m\ddot{x} = -Kx + Kr\cos\theta \tag{3}$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = Mgr\cos\theta + Kxr\sin\theta = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kx - Kr\cos\theta = 0 \tag{5}$$

da cui

$$x = r\cos\theta \qquad r\cos\theta\Big[Mg + rK\sin\theta\Big] = 0 \tag{6}$$

e dunque i punti critici:

$$(\theta_1, x_1) = (\frac{\pi}{2}, 0) \qquad (\theta_2, x_2) = (\frac{3}{2}\pi, 0) \tag{7}$$

e, se $\lambda = \frac{Mg}{Kr} \leq 1$ si hanno anche i punti

$$(\theta_{3,4}, x_{3,4}) = (\arcsin -\lambda, r\cos\theta_{3,4}) \tag{8}$$

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta, x) = \begin{pmatrix} -Mgr\sin\theta + Kxr\cos\theta & Kr\sin\theta \\ Kr\sin\theta & K \end{pmatrix} \tag{9}$$

nei diversi punti critici.

$$V''(\frac{\pi}{2},0) = \begin{pmatrix} -Mgr & Kr \\ Kr & K \end{pmatrix} \tag{10}$$

ha determinante negativo dunque il punto $(\frac{\pi}{2},0)$ è instabile.

$$V''(\frac{3}{2}\pi,0) = \begin{pmatrix} Mgr & -Kr \\ -Kr & K \end{pmatrix} \tag{11}$$

se $\lambda > 1$ ha determinante e traccia positiva e dterminante negativo se $\lambda < 1$ dunque il punto $(\frac{3}{2}\pi,0)$ è stabile se$\lambda > 1$ e instabile se $\lambda < 1$.

Se $\lambda < 1$

$$aV''(\theta 3,4,x_{3,4}) = \begin{pmatrix} Mgr\lambda + Kr^2(1-\lambda^2) & -Kr\lambda \\ Kr-\lambda & K \end{pmatrix} \tag{12}$$

che per $\lambda < 1$ ha traccia e determinante positivi dunque i punti $(\theta_{3,4}, x_{3,4})$ che sono di equilibrio solo se $\lambda < 1$ sono stabili e nel caso $\lambda = 1$ essi coincidono con $(\frac{3}{2}\pi,0)$ che per continuità è stabile in questo caso.

3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(\frac{3}{2}\pi,0)$ nel caso $\lambda > 1$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (\theta, x)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q}-\mathbf{q}_0), V''(0,0)(\mathbf{q}-\mathbf{q}_0)) \tag{13}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{17}{6}Ml^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \tag{14}$$

e $\mathbf{q}_0 := (\frac{3}{2}\pi,0)$ Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(\frac{3}{2}\pi,0) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} Mgr - \omega^2\frac{17}{6}Ml^2 & -Kr \\ -Kr & K-\omega^2 m \end{vmatrix} \tag{15}$$

4) Se $x = 0$ il problema è unidimensionale con potenziale $V(\theta) = -Mgr\sin\theta$ che ha moto periodico se l'energia totale E verifica la condizione

$$E = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}(0)^2\frac{17}{6} + Mgr\sin\theta(0) \neq Mgr \tag{16}$$

Soluzione esercizio 2

1) $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q}\frac{q^2}{2}$ da cui $\dot{q} = \frac{2p}{q^2}$ e dunque

$$H(p,q) = \frac{p^2}{q^2} + \frac{q^4}{4} \tag{17}$$

con equazioni del moto:

$$\dot{p} = \frac{2p^2}{q^3} - q^3, \qquad \dot{q} = \frac{2p}{q^2} \tag{18}$$

2) Lo Jacobiano della trasformazione $Q(q) = \frac{q^2}{2}$ è q da cui la trasformazione si completa in modo canonico con $P = \frac{p}{q}$.

3) Nelle nuove variabili l'hamiltoniana diventa $K(P,Q) = P^2 + Q^2$ con soluzioni $Q(t) = A\sin(2t+\phi)$ e $P(t) = A\cos(2t+\phi)$ con A e ϕ dipendenti dai dati iniziali. Le soluzioni locali per le variabili minuscole diventano

$$q(t) = \sqrt{2Q(t)} = \sqrt{2A\sin(2t+\phi)} \tag{19}$$

$$p(t) = q(t)P(t) = -A\cos(2t+\phi)\sqrt{2A\sin(2t+\phi)} \tag{20}$$

4) L'equazione di Hamilton-Jacobi è: $\frac{1}{q^2}(\frac{\partial W}{\partial q})^2 + \frac{q^4}{4} = E$ da cui otteniamo

$$\beta = \beta(0) + t = \int_{q_0}^{q} \frac{q'}{2}\frac{1}{\sqrt{E - \frac{q'^4}{4}}}dq' = \frac{1}{2}\arcsin(\frac{q^2}{2\sqrt{E}}) - cost \tag{21}$$

da cui

$$q^2(t) = 2\sqrt{E}\sin(2t+\phi) \tag{22}$$

$$p(t) = \frac{\partial W}{\partial q} = q(t)\sqrt{E - \frac{q^4}{4}} = \sqrt{E}q(t)\cos(2t+\phi) \tag{23}$$

Soluzione esercizio 3

1) Poiche' gli oscillatori sono indipendenti abbiamo $Z^c = \frac{1}{N!}Z_1^N$ con

$$Z_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}x^2} = \Big[\frac{2m\pi}{\beta}\Big]^{\frac{1}{2}} Big[\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}\Big]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{\beta\omega} \tag{24}$$

da cui

$$Z^c = \frac{1}{N!}\Big[\frac{2\pi}{\beta\omega}\Big]^N \tag{25}$$

2)

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z^c = NKT \tag{26}$$

3) Calcoliamo

$$E(x_i^2) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} x^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} x^2} dx} = \frac{1}{\beta m \omega^2} \tag{27}$$

da cui $< x^2 >= \frac{1}{\beta m \omega^2}$.

4)

$$\rho(x) = \frac{E(n(x, x+dx))}{dx} = N \frac{e^{-\beta \frac{m\omega^2}{2} x^2}}{\left[\frac{2\pi}{\beta m \omega^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{28}$$