

Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 10-4-2007

E. Scoppola, A. Gaudilliè

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è costituito da una circonferenza materiale rigida omogenea di raggio R e massa M e da un punto P di massa m . La circonferenza può ruotare attorno ad un suo punto fisso O ed il punto materiale scorre senza attrito su un asse verticale y passante per O . Il punto P è collegato al centro C della circonferenza da una molla ideale di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane l'angolo θ che OC forma con l'asse orizzontale e la coordinata y di P (vedi disegno).

- 1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- 2) Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri in gioco.
- 3) Determinare la lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno ad un punto di equilibrio stabile.
- 4) Se il piano Π viene posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costante ω , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione.

Esercizio 2

Si consideri l'hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} \left(2p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 + q_1^2 + 2q_2(q_2 + q_1) \right)$$

- 1) Scrivere le equazioni del moto.
- 2) Determinare la trasformazione canonica tale che

$$Q_1 = q_1 + q_2, \quad Q_2 = q_2.$$

e determinarne una funzione generatrice di seconda specie.

- 3) Usare la trasformazione canonica precedente per risolvere le equazioni del moto.

Esercizio 3

Si consideri un gas a temperatura costante di N particelle identiche non interagenti tra loro contenute in un cilindro di altezza h e raggio R e soggette unicamente ad una forza elastica radiale di costante K .

- 1) Determinare la funzione di partizione canonica.
- 2) Calcolare l'energia interna.
- 3) Calcolare la densità del gas.