

**Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 10-4-2007**

E. Scoppola, A. Gaudillière

**Esercizio 1**

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale  $\Pi$  è costituito da una circonferenza materiale rigida omogenea di raggio  $R$  e massa  $M$  e da un punto  $P$  di massa  $m$ . La circonferenza può ruotare attorno ad un suo punto fisso  $O$  ed il punto materiale scorre senza attrito su un asse verticale  $y$  passante per  $O$ . Il punto  $P$  è collegato al centro  $C$  della circonferenza da una molla ideale di costante di richiamo  $K > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane l'angolo  $\theta$  che  $OC$  forma con l'asse orizzontale e la coordinata  $y$  di  $P$  (vedi disegno).

- 1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- 2) Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri in gioco.
- 3) Determinare la lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno ad un punto di equilibrio stabile.
- 4) Se il piano  $\Pi$  viene posto in rotazione attorno all'asse  $y$  con velocità angolare costante  $\omega$ , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione.

### Esercizio 2

Si consideri l'hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} \left( 2p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 + q_1^2 + 2q_2(q_2 + q_1) \right)$$

- 1) Scrivere le equazioni del moto.
- 2) Determinare la trasformazione canonica tale che

$$Q_1 = q_1 + q_2, \quad Q_2 = q_2.$$

e determinarne una funzione generatrice di seconda specie.

- 3) Usare la trasformazione canonica precedente per risolvere le equazioni del moto.

### Esercizio 3

Si consideri un gas a temperatura costante di  $N$  particelle identiche non interagenti tra loro contenute in un cilindro di altezza  $h$  e raggio  $R$  e soggette unicamente ad una forza elastica radiale di costante  $K$ .

- 1) Determinare la funzione di partizione canonica.
- 2) Calcolare l'energia interna.
- 3) Calcolare la densità del gas.