Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 10-4-2007

E. Scoppola, A.Gaudillière

Soluzione esercizio 1

1) L'energia cinetica della circonferenza può essere determinata con il teorema di Koenig o con il teorema di Steiner . Abbiamo

$$T = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

L'energia potenziale e'

$$V = mgy + MgR\sin\theta + \frac{1}{2}K\Big[y^2 - 2Ry\sin\theta\Big]$$

La lagrangiana è dunque:

$$\mathcal{L} = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy - MgR\sin\theta - \frac{1}{2}K\Big[y^2 - 2Ry\sin\theta\Big] \tag{1}$$

con equazioni del moto:

$$2MR^2\ddot{\theta} = -MgR\cos\theta + KRy\cos\theta \tag{2}$$

$$m\ddot{y} = -mg - Ky + KR\sin\theta \tag{3}$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = R\cos\theta(Mg - Ky) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = mg + Ky - KR\sin\theta = 0 \tag{5}$$

e quindi otteniamo i punti critici $(\frac{\pi}{2}, R - \frac{mg}{K})$, $(\frac{3\pi}{2}, -R - \frac{mg}{K})$ e se $\lambda := \frac{(m+M)g}{KR} < 1$ anche i punti $(\arcsin\lambda, \frac{Mg}{K})$.
Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde che è data da:

$$V''(\theta, y) = \begin{pmatrix} -R\sin\theta[Mg - Ky] & -KR\cos\theta \\ -KR\cos\theta & K \end{pmatrix} \tag{6}$$

nei diversi punti di equilibrio. Otteniamo:

$$V''(\frac{\pi}{2}, R - \frac{mg}{K}) = \begin{pmatrix} -R[Mg - KR + mg] & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{7}$$

che è stabile se $\lambda < 1$ e instabile per$\lambda > 1$.

$$V''(\frac{3\pi}{2}, -R - \frac{mg}{K}) = \begin{pmatrix} R[Mg + KR + mg] & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{8}$$

e dunque il punto è stabile.

$$V''(\arcsin \lambda, \frac{Mg}{K}) = \begin{pmatrix} 0 & -KR\cos\lambda \\ -KR\cos\lambda & K \end{pmatrix} \tag{9}$$

che ha determinante minore di zero e dunque questi punti, quando esistono sono instabili.

Nel caso $\lambda = 1$ per continuità otteniamo che $(\frac{\pi}{2}, R - \frac{mg}{K})$ è instabile.

3) Intorno al punto $(\frac{3\pi}{2}, -R - \frac{mg}{K})$ abbiamo la lagrangiana delle piccole oscillazioni

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q} - \mathbf{q_0}), V''(\frac{3\pi}{2}, -R - \frac{mg}{K})(\mathbf{q} - \mathbf{q_0}))$$

con $\mathbf{q} = (\theta, y)$, $\mathbf{q_0} = (\frac{3\pi}{2}, -R - \frac{mg}{K})$ e

$$A = \begin{pmatrix} 2MR^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \tag{10}$$

4) Quando il piano viene posto in rotazione alla lagrangiana precedentemente calcolata dobbiamo sottrarre il potenziale centrifugo della circonferenza:

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2 MR^2 \cos^2\theta$$

Soluzione esercizio 2

1) Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -(q_1 + q_2), \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -(q_1 + 2q_2) \tag{11}$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = 2p_1 - p_2, \qquad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2 - p_1. \tag{12}$$

2) La trasformazione delle variabili $\mathbf{q}$ considerata ha jacobiano

$$J_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

che ha inversa

$$J_q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

e dunque per gli impulsi otteniamo:

$$\mathbf{P} = (J_q^{-1})^t \mathbf{p}$$

e quindi

$$P_1 = p_1, \qquad P_2 = -p_1 + p_2$$

La funzione generatrice di seconda specie è:

$$F(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = (q_1 + q_2)P_1 + q_2 P_2$$

3) La nuova hamiltoniana ha la forma

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2}\Big(|\mathbf{P}|^2 + |\mathbf{Q}|^2\Big)$$

e dunque abbiamo due oscillatori armonici disaccoppiati di pulsazione $\omega = 1$

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{Q}, \qquad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{P}$$

con soluzioni:

$$Q_1(t) = A_1 \sin(t + \phi_1), \qquad P_1(t) = A_1 \cos(t + \phi_1)$$

$$Q_2(t) = A_2 \sin(t + \phi_2), \qquad P_2(t) = A_2 \cos(t + \phi_2)$$

con A_i, ϕ_i costanti che dipendono dai dati iniziali. Quindi

$$q_1(t) = Q_1(t) - Q_2(t) = A_1 \sin(t + \phi_1) - A_2 \sin(t + \phi_2)$$

$$q_2(t) = Q_2(t) = A_2 \sin(t + \phi_2)$$

$$p_1(t) = P_1(t) = A_1 \cos(t + \phi_1)$$

$$p_2(t) = P_1(t) + P_2(t) = A_1 \cos(t + \phi_1) + A_2 \cos(t + \phi_2)$$

Soluzione esercizio 3

1) L'amiltoniana di una singola particella è:

$$H_1 = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \frac{1}{2}Kr^2$$

Poichè le particelle non interagiscono tra loro abbiamo:

$$Z^c = \frac{1}{N!} Z_1^N$$

con

$$Z_1 = \Big(\frac{2\pi m}{\beta}\Big)^{\frac{3}{2}} \int_0^R r\, dr \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\beta\frac{1}{2}Kr^2} = \Big(\frac{2\pi m}{\beta}\Big)^{\frac{3}{2}} \frac{2\pi h}{\beta K}(1 - e^{-\beta\frac{1}{2}KR^2})$$

2) L'energia interna e' data da

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z^c = \frac{5}{2}\frac{1}{\beta} - \frac{KR^2}{2}\frac{1}{e^{\beta\frac{1}{2}KR^2} - 1} \tag{15}$$

3) La densità del gas è $\rho(r) = \frac{E_\mu(n(r)dr)}{2\pi rh\,dr}$ con

$$E_\mu(n(r)dr) = N\frac{\int_0^R dr_i \mathbf{1}_{\{r_i\in(r,r+dr)\}} r_i \exp\{-\beta\frac{Kr_i^2}{2}\}}{\int_0^R dr_i r_i \exp\{-\beta\frac{Kr_i^2}{2}\}} = N\frac{r\exp\{-\beta\frac{Kr^2}{2}\}}{\frac{1}{\beta K}(1-e^{-\beta\frac{1}{2}KR^2})}dr \tag{16}$$

e dunque

$$\rho(r) = \frac{N\beta K}{2\pi h}\frac{\exp\{-\beta\frac{Kr^2}{2}\}}{\frac{1}{\beta K}(1-e^{-\beta\frac{1}{2}KR^2})}$$