Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 12-7-2007

E. Scoppola, A.Gaudillière

Soluzione esercizio 1

1) Le coordinate del punto C sono:

$$x_C = r\cos\theta \qquad y_C = r\sin\theta$$

Applicando il teorema di Koenig all'asta otteniamo la sua energia cinetica:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{m4r^2}{12}\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\frac{4mr^2}{3}\dot\theta^2$$

L'energia cinetica del punto é

$$T_P = \frac{1}{2}mr^2\dot\phi^2$$

quindi l'energia cinetica totale é

$$T = \frac{1}{2}\frac{4mr^2}{3}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot\phi^2$$

L'energia potenziale e' gravitazionale e elastica:

$$V = mgr(\sin\theta + \sin\phi) + \frac{1}{2}Kr^2\Big[(\cos\theta - \cos\phi)^2 + (\sin\theta - \sin\phi)^2\Big] =$$

$$= mgr(\sin\theta + \sin\phi) - Kr^2\cos(\theta - \phi)$$

La lagrangiana è dunque:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{4mr^2}{3}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot\phi^2 - mgr(\sin\theta + \sin\phi) + Kr^2\cos(\theta - \phi) \qquad (1)$$

con equazioni del moto:

$$\frac{4mr^2}{3}\ddot\theta = -mgr\cos\theta - Kr^2\sin(\theta - \phi) \qquad (2)$$

$$mr^2\ddot\phi = -mgr\cos\phi + Kr^2\sin(\theta - \phi) \qquad (3)$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = mgr\cos\theta + Kr^2\sin(\theta - \phi) = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = mgr\cos\phi - Kr^2\sin(\theta-\phi) = 0 \tag{5}$$

sommando otteniamo

$$\cos\theta + \cos\phi = 0$$

da cui

$$\phi = \pi - \theta \quad \text{oppure} \quad \phi = \pi + \theta$$

Nel primo caso otteniamo l'equazione per θ:

$$r\cos\theta\Big[mg - 2Kr\sin\theta\Big] = 0$$

da cui otteniamo i punti critici $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ e se $\lambda := \frac{mg}{2Kr} < 1$ anche i punti $(\theta_{3,4}, \pi - \theta_{3,4})$ con $\theta_{3,4} = \arcsin\lambda$.

Nel secondo caso abbiamo l'equazione

$$\cos\theta = 0$$

da cui otteniamo i punti critici $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

3) Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde che è data da:

$$V''(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} -mgr\sin\theta + Kr^2\cos(\theta-\phi) & -Kr^2\cos(\theta-\phi) \\ -Kr^2\cos(\theta-\phi) & -mgr\sin\phi + Kr^2\cos(\theta-\phi) \end{pmatrix} \tag{6}$$

nei diversi punti di equilibrio. Nel caso $mg = 4Kr$ abbiamo $\lambda = 2$ e dunque dobbiamo considerare solo i quattro punti di equilibrio $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Otteniamo:

$$V''(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -mgr + Kr^2 & -Kr^2 \\ -Kr^2 & -mgr + Kr^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

che ha traccia negativa e dunque il punto é instabile.

$$V''(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} mgr + Kr^2 & -Kr^2 \\ -Kr^2 & mgr + Kr^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

che ha traccia e determinante positivi e dunque il punto è stabile.

$$V''(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -mgr - Kr^2 & Kr^2 \\ Kr^2 & mgr - Kr^2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$V''(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} mgr - Kr^2 & Kr^2 \\ Kr^2 & -mgr - Kr^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

che hanno traccia minore di zero e dunque questi punti sono instabili.

4) Intorno al punto $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ abbiamo la lagrangiana delle piccole oscillazioni

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q} - \mathbf{q_0}), V''(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})(\mathbf{q} - \mathbf{q_0}))$$

con $\mathbf{q} = (\theta, \phi)$, $\mathbf{q_0} = (\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ e

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4mr^2}{3} & 0 \\ 0 & mr^2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

4) Quando il piano viene posto in rotazione alla lagrangiana precedentemente calcolata dobbiamo sottrarre il potenziale centrifugo:

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2 mr^2 \cos^2\phi - \frac{1}{2}\omega^2 m \frac{4r^2}{3} \cos^2\theta$$