Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 20-9-2007

E. Scoppola, A.Gaudillière

Soluzione esercizio 1

1) Le coordinate del punto P_2 sono:

$$x_2, \qquad y_2 = -x_2^2$$

quindi l'energia cinetica totale é

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2(1+4x_2^2)$$

L'energia potenziale e' gravitazionale e elastica:

$$V = -mgx_2^2 + \frac{1}{2}K\Big[(x_1-x_2)^2 + x_2^4\Big]$$

La lagrangiana è dunque:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\Big[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2(1+4x_2^2)\Big] + mgx_2^2 - \frac{1}{2}K\Big[(x_1-x_2)^2 + x_2^4\Big] \qquad (1)$$

con equazioni del moto:

$$m\ddot{x}_1 = -K(x_1-x_2) \qquad (2)$$

$$m\ddot{x}_2(1+4x_2^2) = -4mx_2\dot{x}_2^2 + 2mgx_2 - Kx_2 + Kx_1 - 2Kx_2^3 \qquad (3)$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = K(x_1-x_2) = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = -2mgx_2 + Kx_2 - Kx_1 + 2Kx_2^3 = 0 \qquad (5)$$

dalla prima otteniamo $x_1 = x_2$ e dalla seconda

$$2x_2\Big[-mg + Kx_2^2\Big] = 0$$

e quindi i punti critici:

$$(0,0), \qquad \Big(\sqrt{\frac{mg}{K}}, \sqrt{\frac{mg}{K}}\Big), \qquad \Big(-\sqrt{\frac{mg}{K}}, -\sqrt{\frac{mg}{K}}\Big)$$

3) Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde:

$$V''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & -2mg + K + 6Kx_2^2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

nei diversi punti di equilibrio. Otteniamo:

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K - 2mg \end{pmatrix} \tag{7}$$

che ha determinante negativo e dunque il punto é instabile.

$$V''(\pm\sqrt{\frac{mg}{K}}, \pm\sqrt{\frac{mg}{K}}) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K + 4mg \end{pmatrix} \tag{8}$$

che ha traccia e determinante positivi e dunque i punti sono stabili.

4) Intorno ai punti $(\pm\sqrt{\frac{mg}{K}}, \pm\sqrt{\frac{mg}{K}})$ abbiamo la lagrangiana delle piccole oscillazioni

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q} - \mathbf{q_0}), V''(\pm\sqrt{\frac{mg}{K}}, \pm\sqrt{\frac{mg}{K}})(\mathbf{q} - \mathbf{q_0}))$$

con $\mathbf{q} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{q_0} = (\pm\sqrt{\frac{mg}{K}}, \pm\sqrt{\frac{mg}{K}})$ e

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m(1 + 4\frac{mg}{K}) \end{pmatrix} \tag{9}$$

4) Quando il piano viene posto in rotazione alla lagrangiana precedentemente calcolata dobbiamo sottrarre il potenziale centrifugo:

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2 m(x_1^2 + x_2^2)$$

Soluzione esercizio 2

1) Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -p^2 e^q, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2pe^q \tag{10}$$

2) La trasformazione della variabile q considerata ha jacobiano

$$J_q = -e^{-q} \tag{11}$$

che ha inversa

$$J_q^{-1} = -e^q \tag{12}$$

e dunque per gli impulsi otteniamo:

$$P = (J_q^{-1})p = -pe^q$$

3) La nuova hamiltoniana ha la forma

$$K(P,Q) = P^2 Q$$

con equazioni del moto

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -P^2$$

che risolviamo per separazione di variabili:

$$P(t) = \frac{P(0)}{P(0)t+1}$$

e

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 2QP = 2Q\frac{P(0)}{P(0)t+1}$$

da cui, sempre per separazione di variabili, otteniamo:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{2P(0)}{P(0)t+1}dt$$

e dunque

$$Q(t) = Q(0)\Big(P(0)t+1\Big)^2$$

da cui:

$$q(t) = -\ln Q(t) = q(0) - 2\ln(P(0)t+1)$$
$$p(t) = -P(t)Q(t) = p(0)(P(0)t+1)$$

con $P(0) = -p(0)e^{q(0)}$.

4) Nel caso di particelle non interagenti abbiamo

$$Z_c = \frac{1}{N!}Z_1^N$$

con Z_1 funzione di partizione di singola particella ottenuta da

$$Z_1 = \int_0^\infty dq \int_{-\infty}^\infty dp\, e^{-\beta p^2 e^q} = \int_0^\infty dq \Big[\frac{\pi}{\beta e^q}\Big]^{\frac{1}{2}} = 2\Big(\frac{\pi}{\beta}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

da cui

$$Z_c = \frac{1}{N!}2^N\Big(\frac{\pi}{\beta}\Big)^{\frac{N}{2}}$$

5) Per l'energia interna abbiamo:

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_c = \frac{N}{2}\frac{1}{\beta} = \frac{N}{2}KT.$$