I Esonero di Meccanica Analitica e Statistica: 22-2-2007

E. Scoppola

Soluzione

1) Dal teorema di Koenig otteniamo per l'energia cinetica dell'anello

$$T_a = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Mr^2\dot{x}^2 = M\dot{x}^2 \tag{1}$$

dove abbiamo usato la relazione di rotolamento $\dot{\phi} = r\dot{\phi} = \dot{x}$, e per quella del punto P derivando rispetto al tempo

$$x_P = x + \cos\theta, \qquad y_P = -1 + \sin\theta$$

otteniamo

$$T_P = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta) \tag{2}$$

Il potenziale gravitazionale è $V_g = mg\sin\theta$ e quello elastico è $V_{el} = \frac{1}{2}K[x^2 + 2x\cos\theta - 2\sin\theta]$. La lagrangiana dunque è:

$$\mathcal{L} = M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta) - mg\sin\theta - \frac{1}{2}K[x^2 + 2x\cos\theta - 2\sin\theta] \tag{3}$$

Le equazioni del moto sono:

$$(2M + m)\ddot{x} - m\dot{\theta}^2\cos\theta - m\ddot{\theta}\sin\theta = -Kx - K\cos\theta$$
$$m\ddot{\theta} - m\ddot{x}\sin\theta = -mg\cos\theta + Kx\sin\theta + K\cos\theta$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kx + K\cos\theta = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mg\cos\theta - Kx\sin\theta - K\cos\theta = 0 \tag{5}$$

cioè sostituendo $x = -\cos\theta$ otteniamo

$$\cos\theta[mg - K + K\sin\theta] = 0$$

cioè i punti

$$(0, \frac{\pi}{2}), \quad (0, \frac{3}{2}\pi)$$

e se $\lambda := \frac{mg}{K} < 2$ anche i punti

$$(-\cos\theta_{3,4}, \theta_{3,4})$$

con $\theta_{3,4} = \arcsin(1-\lambda)$.

Per studiare la stabilità valutiamo la matrice delle derivate seconde nei diversi punti.

$$V''(x,\theta) = \begin{pmatrix} K & -K\sin\theta \\ -K\sin\theta & -(mg-K)\sin\theta - Kx\cos\theta \end{pmatrix} \tag{6}$$

Otteniamo

$$V''(0,\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & -(mg-K) \end{pmatrix} \tag{7}$$

che ha determinante uguale a $-mgK$, negativo, e dunque il punto di equilibrio è instabile.

$$V''(0,\frac{3}{2}\pi) = \begin{pmatrix} K & K \\ K & (mg-K) \end{pmatrix} \tag{8}$$

che ha traccia mg e determinante $K(mg-2K)$ dunque il punto di equilibrio $(0, \frac{3}{2}\pi)$ è stabile se $\lambda > 2$ e instabile se $\lambda < 2$.

In questo caso esistono anche gli altri due punti di equilibrio per i quali

$$V''(-\cos\theta_{3,4}, \theta_{3,4}) = \begin{pmatrix} K & -K(1-\lambda) \\ -K(1-\lambda) & K(1-\lambda)^2 + K\lambda(2-\lambda) \end{pmatrix} \tag{9}$$

dunque determinante positivo e poichè $K > 0$ i punti di equilibrio sono stabili. Nel caso $\lambda = 2$ questi punti di equilibrio coincidono con il punto $(0, \frac{3}{2}\pi)$ che per continuità è stabile.

3) Intorno al punto di equilibrio $(0, \frac{3}{2}\pi)$, stabile per $\lambda = 3$ la lagrangiana delle piccole oscillazioni è:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q}-\mathbf{q}_0), V''(0,\frac{3}{2}\pi)(\mathbf{q}-\mathbf{q}_0)) \tag{10}$$

con $\mathbf{q} = (x,\theta)$, $\mathbf{q}_0 = (0, \frac{3}{2}\pi)$ ed

$$A = \begin{pmatrix} 2M+m & m \\ m & m \end{pmatrix} \tag{11}$$

4) Se $x = 0$ la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta + K\sin\theta$$

e dunque il potenziale è $V(\theta) = (mg - K)\sin\theta$ e quindi il moto è sempre periodico tranne per i dati iniziali $\theta_0, \dot{\theta}_0$ tali che

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\theta}_0^2 + (mg - K)\sin\theta_0 = \pm(mg - K)$$