

II Esonero di Meccanica Analitica e Statistica: 30-3-2007

E. Scoppola, A. Gaudillière

Soluzione Esercizio

1) Data la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - q^3 \quad (1)$$

sia $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q} q^4$ da cui $\dot{q} = \frac{p}{q^4}$ e dunque

$$H = \frac{p^2}{2q^4} + q^3 \quad (2)$$

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{2p^2}{q^5} - 3q^2 \quad (3)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{q^4} \quad (4)$$

2) Applicando il procedimento di seconda specie

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = q^2 P \quad Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{q^3}{3} \quad (5)$$

da cui otteniamo la trasformazione:

$$P = \frac{p}{q^2} \quad Q = \frac{q^3}{3} \quad (6)$$

3) La nuova hamiltoniana è:

$$K(P, Q) = \frac{P^2}{2} + 3Q \quad (7)$$

con equazioni di Hamilton:

$$\dot{P} = -3, \quad \dot{Q} = P$$

da cui otteniamo per i dati iniziali scelti $P(0) = 0$, $Q(0) = \frac{1}{3}$ le soluzioni

$$P(t) = -3t, \quad Q(t) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2}t^2$$

Con la trasformazione inversa otteniamo:

$$q(t) = (3Q)^{\frac{1}{3}} = \left(1 - \frac{9}{2}t^2\right)^{\frac{1}{3}} \quad (8)$$

$$p(t) = P(3Q)^{\frac{2}{3}} = -3t\left(1 - \frac{9}{2}t^2\right)^{\frac{2}{3}} \quad (9)$$

4) L'equazione di Hamilton-Jacobi indipendente dal tempo è:

$$\frac{1}{2q^4} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + q^3 = E$$

da cui

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm \sqrt{2q^4(E - q^3)}$$

e quindi

$$\beta = \beta(0) + t = \frac{\partial W}{\partial E} = \pm \int_{q(0)}^q \frac{q'^2}{\sqrt{2(E - q'^3)}} dq'$$

Con i dati iniziali $p(0) = 0, q(0) = 1$ abbiamo $E = 1$ e dobbiamo scegliere il segno -; dunque abbiamo:

$$\beta(0) + t = - \int_1^{q^3} \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{1-q^3}$$

da cui

$$q^3 = 1 - \left(\frac{3}{\sqrt{2}} (\beta(0) + t) \right)^2$$

con $\beta(0) = 0$ e dunque

$$q(t) = \left(1 - \frac{9}{2}t^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

e

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = -\sqrt{2q^4(1 - q^3)} = -3t\left(1 - \frac{9}{2}t^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

5) Poichè $H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2q_i^4} + q_i^3 \right)$ abbiamo $Z^c = \frac{1}{N!} (Z_1)^N$ con

$$Z_1 = \int_0^\infty dq \int_{-\infty}^\infty dp \exp\left\{-\beta\left(\frac{p^2}{2q^4} + q^3\right)\right\} = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dq q^2 \exp\{-\beta(q^3)\} = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3\beta} \quad (10)$$

6) L'energia interna e' data da

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z^c = N \frac{3}{2} KT. \quad (11)$$

7) La densità del gas è $\rho(q) = \frac{E(n(q)dq)}{dq}$ con

$$E(n(q)dq) = N \frac{\int_0^\infty dq_i \int_{-\infty}^{+\infty} dp_i \mathbf{1}_{\{q_i \in (q, q+dq)\}} \exp\{-\beta(\frac{p_i^2}{2q_i^4} + q_i^3)\}}{\int_0^\infty dq_i \int_{-\infty}^{+\infty} dp_i \exp\{-\beta(\frac{p_i^2}{2q_i^4} + q_i^3)\}} = 3N\beta q^2 \exp\{-\beta q^3\} dq \quad (12)$$

da cui

$$\rho(q) = 3N\beta q^2 \exp\{-\beta q^3\}$$