Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 3-4-2007
E. Scoppola, A.Gaudillière

Soluzione esercizio 1

1) Le coordinate dei centri delle due aste sono:

$$x_1 = \frac{l}{2}\sin\theta_1, \qquad y_1 = \frac{l}{2}\cos\theta_1$$

$$x_2 = \frac{l}{2}\sin\theta_2, \qquad y_1 = \frac{l}{2}(1+\cos\theta_2).$$

Dal teorema di Koenig abbiamo l'energia cinetica:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m\frac{l^2}{4}\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}m\frac{l^2}{4}\dot\theta_2^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta_2^2$$

L'energia potenziale e' solo elastica ed è data da:

$$V = \frac{1}{2}K\frac{l^2}{4}\Big[(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2 + (\cos\theta_1 - 1 - \cos\theta_2)^2\Big] = -K\frac{l^2}{4}\Big[\cos(\theta_1-\theta_2) + \cos\theta_1 - \cos\theta_2\Big] + cost$$

La lagrangiana è dunque:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\frac{l^2}{3}\Big(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2\Big) + K\frac{l^2}{4}\Big[\cos(\theta_1-\theta_2) + \cos\theta_1 - \cos\theta_2\Big] \qquad (1)$$

con equazioni del moto:

$$m\frac{l^2}{3}\ddot\theta_1 = K\frac{l^2}{4}\Big[-\sin(\theta_1-\theta_2) - \sin\theta_1\Big] \qquad (2)$$

$$m\frac{l^2}{3}\ddot\theta_2 = K\frac{l^2}{4}\Big[\sin(\theta_1-\theta_2) + \sin\theta_2\Big] \qquad (3)$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial\theta_1} = K\frac{l^2}{4}\Big[\sin(\theta_1-\theta_2) + \sin\theta_1\Big] = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta_2} = K\frac{l^2}{4}\Big[-\sin(\theta_1-\theta_2) - \sin\theta_2\Big] = 0 \qquad (5)$$

da cui per addizione otteniamo

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2$$

cioè $\theta_1 = \theta_2$ oppure $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Quindi nel caso $\theta_1 = \theta_2$ otteniamo i punti critici $(0,0)$, (π,π) e per $\theta_2 = \pi - \theta_1$, dall'equazione

$$\sin\theta_1\Big[-2\cos\theta_1 + 1\Big] = 0$$

otteniamo i punti critici $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$, $(-\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3})$.
Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde che, trascurando il fattore costante $K\frac{l^2}{4}$, è data da:

$$V''(\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1-\theta_2)+\cos\theta_1 & -\cos(\theta_1-\theta_2) \\ -\cos(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_2)-\cos\theta_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

nei diversi punti di equilibrio, ottenendo:

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

che ha determinante negativo dunque il punto $(0,0)$ è instabile.

$$V''(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

e dunque anche (π,π) è instabile.

$$V''(0,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

e dunque $(0,\pi)$ è instabile.

$$V''(\pi,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

che ha traccia negativa e dunque $(\pi,0)$ è instabile.

$$V''(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}) = V"(-\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

e dunque questi due ultimi punti sono gli unici punti stabili.

3) Nel caso $\theta_2 = 0$ il potenziale diventa

$$V(\theta_1) = -K\frac{l^2}{2}\cos\theta_1 \tag{12}$$

e l'energia, che è una quantità conservata è:

$$E = \frac{1}{2}m\frac{l^2}{3}\dot{\theta}_1^2 - K\frac{l^2}{2}\cos\theta_1 \tag{13}$$

Dunque tutti i moti sono periodici, oscillatori o rotatori, eccetto i dati iniziali corrispondenti al valore dell'energia $E = \pm K\frac{l^2}{2}$.

Soluzione esercizio 2

1) Abbiamo l'hamiltoniana

$$H = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + \frac{1}{2}K(x^2 + y^2) + mgy \tag{14}$$

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Kx, \qquad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -Ky - mg \tag{15}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \qquad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}. \tag{16}$$

2) La trasformazione delle variabili $\mathbf{q}$ considerata è una traslazione e dunque le variabili $\mathbf{p}$ vengono lasciate invariate perchè lo jacobiano è la matrice identità. Quindi abbiamo:

$$X = x, \quad Y = y + \frac{mg}{K}$$

$$P_X = p_x, \quad P_Y = p_y$$

3) La nuova hamiltoniana ha la forma

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{|\mathbf{P}|^2}{2m} + |\mathbf{Q}|^2$$

e dunque abbiamo

$$X(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1), \qquad P_X(t) = m\omega A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$Y(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi_2), \qquad P_Y(t) = m\omega A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

con $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ e A_i, ϕ_i costanti che dipendono dai dati iniziali. Quindi

$$x(t) = X(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1), \qquad p_x(t) = P_X(t) = m\omega A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$y(t) = Y(t) - \frac{mg}{K} = A_2 \sin(\omega t + \phi_2) - \frac{mg}{K}, \qquad p_y(t) = P_Y(t) = m\omega A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

4) Poichè le particelle non interagiscono tra loro abbiamo:

$$Z^c = \frac{1}{N!} Z_1^N$$

con

$$Z_1 = \frac{2\pi m}{\beta} \left(\frac{2\pi}{\beta K}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\beta \frac{K}{2} [y^2 + 2\frac{mg}{K} y]}$$

col cambiamneto di variabile $y \to z = y + \frac{mg}{K}$ abbiamo che l'integrale è uguale a

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\beta \frac{K}{2} z^2} e^{\beta \frac{K}{2} (\frac{mg}{K})^2}$$

e quindi

$$Z_1 = \frac{2\pi m}{\beta} \Big(\frac{2\pi}{\beta K} \Big) e^{\beta \frac{(mg)^2}{2K}}$$

5) L'energia interna e' data da

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z^c = 2NkT - \frac{(mg)^2}{2K} N \tag{17}$$

e l'entropia

$$S = k(\beta U + \log Z^c) = \frac{1}{T}\Big(2NkT - \frac{(mg)^2}{2K} N\Big) - k\log(N!) + 2Nk\log(\frac{2\pi}{\beta}) + Nk\log(\frac{m}{K}) + Nk\beta\frac{(mg)^2}{2K} \tag{18}$$

6) L'elongazione verticale media è:

$$E_\mu(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, (y + \frac{mg}{K} - \frac{mg}{K})\, e^{-\beta\frac{K}{2}[y^2 + 2\frac{mg}{K} y]}}{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-\beta\frac{K}{2}[y^2 + 2\frac{mg}{K} y]}}$$

e col cambiamento di variabili precedente otteniamo immediatamente

$$E_\mu(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i) = -\frac{mg}{K}$$