

Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 16-6-2008
E. Scoppola

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è costituito da un'asta sottile AB , rigida, omogenea di lunghezza l e massa M e da un punto materiale P di massa m . Gli estremi A e B dell'asta sono liberi di scorrere rispettivamente sugli assi x e y di un riferimento cartesiano di origine O su Π . Il punto P scorre senza attrito sull'asse y . Il punto P è collegato al centro C dell'asta da una molla ideale di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane l'angolo θ che AB forma con l'asse verticale e la coordinata y di P .

- 1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- 2) Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri in gioco.
- 3) Determinare la lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno ad un punto di equilibrio stabile.
- 4) Se il piano Π viene posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costante ω , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione.

Esercizio 2

Si consideri la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3} \quad \text{con } q > 0. \quad (1)$$

- 1) Scrivere l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
- 2) Determinare la trasformazione canonica tale che $Q(q) = \frac{q^3}{3}$.
- 3) Usare la trasformazione trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1$, $p(0) = 0$.