

**Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 18-9-2008**  
E. Scoppola

**Esercizio 1**

Un sistema meccanico pesante, appartenente ad un piano verticale  $\pi$ , è costituito da 2 punti materiali  $P_1$  e  $P_2$  di masse rispettivamente  $m_1$  e  $m_2$ . Il punto  $P_1$  è vincolato ad una retta orizzontale  $x$  del piano  $\pi$  ed il punto  $P_2$  è vincolato ad una parabola di equazione  $y = -ax^2$  con  $a > 0$  (vedi figura). I due punti sono collegati da una molla ideale di costante di richiamo  $K > 0$  e lunghezza a riposo nulla.

- 1) Scrivere la lagrangiana e l'equazione del moto.
- 2) Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità al variare dei parametri.
- 3) Calcolare la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno ad un punto di equilibrio stabile del sistema.

Se il punto  $P_1$  è fissato nell'origine  $O$

- 4) determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico.

**Scritto di Meccanica Analitica e Statistica: 18-9-2008**  
E. Scoppola

**Esercizio 2**

Sia

$$\dot{p} = -3p - 2q, \quad \dot{q} = 4p + 3q \quad (1)$$

- 1) Dimostrare che il sistema è hamiltoniano e calcolarne l'hamiltoniana  $H$ .
- 2) Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione

$$F(q, P) = \frac{P^2 - q^2}{4} + \frac{Pq}{2} \quad (2)$$

- 3) Usando la trasformazione trovata al punto 2) determinare le soluzioni del sistema con dati iniziali  $p(0) = q(0) = 1$ .