Scritto di Meccanica Analitica del 16-6-08

E. Scoppola

Soluzione Esercizio 1

1) Le coordinate di C sono

$$x_C = \frac{l}{2}\sin\theta, \qquad y_C = \frac{l}{2}\cos\theta$$

da cui

$$T_{AB} = \frac{1}{2}M\frac{l^2}{4}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\dot\theta^2 = \frac{1}{2}M\frac{l^2}{3}\dot\theta^2$$
$$T_P = \frac{1}{2}m\dot y^2$$

Il potenziale gravitazionale:

$$V_g = mgy + Mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

e quello elastico

$$\frac{1}{2}K\Big(\frac{l^2}{4}\sin^2\theta + (\frac{l}{2}\cos\theta - y)^2\Big) = \frac{1}{2}K(y^2 - ly\cos\theta)$$

da cui abbiamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\frac{l^2}{3}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\dot y^2 - mgy - Mg\frac{l}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}K(y^2 - ly\cos\theta)$$

con le equazioni del moto

$$\frac{Ml^2}{3}\ddot\theta = Mg\frac{l}{2}\sin\theta - \frac{Kly}{2}\sin\theta$$

e

$$m\ddot y = -mg - Ky + \frac{Kl}{2}\cos\theta$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale che ricaviamo da

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{l}{2}\sin\theta\Big(- Mg + Ky\Big) = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = mg + Ky - \frac{Kl}{2}\cos\theta = 0$$

ottenendo

$$(\theta_1, y_1) = (0, \frac{l}{2} - \frac{mg}{K}), \qquad (\theta_2, y_2) = (\pi, -\frac{l}{2} - \frac{mg}{K})$$

e se $\lambda := \frac{2(m+M)g}{Kl} \leq 1$ anche

$$(\theta_{3,4}, y_{3,4}) = (\arccos \lambda, \frac{Mg}{K})$$

Per determinare la stabilitá calcoliamo la matrice delle derivate seconde:

$$V''(\theta, y) = \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \cos \theta (Ky - Mg) & \frac{Kl}{2} \sin \theta \\ \frac{Kl}{2} \sin \theta & K \end{pmatrix}$$

nei diversi punti di equilibrio. Otteniamo:

$$V''(\theta_1, y_1) = \begin{pmatrix} \frac{l}{2}(\frac{Kl}{2} - Mg - mg) & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

dunque il punto é instabile se $\lambda > 1$ e stabile se $\lambda < 1$.

$$V''(\theta_2, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{l}{2}(\frac{Kl}{2} + Mg + mg) & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$

dunque il punto é stabile sempre. Nel caso $\lambda < 1$ consideriamo

$$V''(\theta_{3,4}, y_{3,4}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Kl}{2} \sin \theta_{3,4} \\ \frac{Kl}{2} \sin \theta_{3,4} & K \end{pmatrix}$$

che ha determinante negativo dunque i punti, quando esistono, sono instabili. Nel caso $\lambda = 1$ questi punti coincidono col punto (θ_1, y_1) che per continuitá é instabile.

3) Denotando con $\mathbf{q} = (\theta, y)$ e con $\mathbf{q}_2 = (\theta_2, y_2)$ e con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{Ml^2}{3} & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

abbiamo la lagrangiana delle piccole oscillazioni

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q} - \mathbf{q_2}), V''(\mathbf{q}_2)(\mathbf{q} - \mathbf{q_2}))$$

4) Se il piano é posto in rotazoione la nuova lagrangiana sará

$$\mathcal{L}_K = \mathcal{L} - V_{centr}$$

con il potenziale centrifugo dato da

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2 \rho \int_0^l x^2 \sin^2 \theta dx = -\frac{1}{2}\omega^2 M \frac{l^2}{3} \sin^2 \theta$$

Soluzione Esercizio 2

1) Data la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3} \tag{1}$$

sia $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q} q^4$ da cui $\dot{q} = \frac{p}{q^4}$ e dunque

$$H = \frac{p^2}{2q^4} + \frac{q^3}{3} \tag{2}$$

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{2p^2}{q^5} - q^2 \tag{3}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{q^4} \tag{4}$$

2) Abbiamo $Q'(q) = q^2$ da cui otteniamo la trasformazione:

$$P = \frac{p}{Q'(q)} = \frac{p}{q^2} \qquad Q = \frac{q^3}{3} \tag{5}$$

3) La nuova hamiltoniana è:

$$K(P,Q) = \frac{P^2}{2} + Q \tag{6}$$

con equazioni di Hamilton:

$$\dot{P} = -1, \qquad \dot{Q} = P$$

da cui otteniamo per i dati iniziali scelti $P(0) = 0$, $Q(0) = \frac{1}{3}$ le soluzioni

$$P(t) = -t, \qquad Q(t) = \frac{1}{3} - \frac{t^2}{2}$$

Con la trasformazione inversa otteniamo:

$$q(t) = (3Q)^{\frac{1}{3}} = (1 - \frac{3}{2}t^2)^{\frac{1}{3}} \tag{7}$$

$$p(t) = P(3Q)^{\frac{2}{3}} = -t(1 - \frac{3}{2}t^2)^{\frac{2}{3}} \tag{8}$$