Scritto di Meccanica Analitica del 17-2-09

E. Scoppola

Soluzione Esercizio 1

1) Le coordinate di P sono

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z$$

con $x^2 + y^2 = r^2 = z^2$ da cui

$$T = \frac{1}{2}m(2\dot{z}^2 + z^2\dot{\theta}^2)$$

Il potenziale gravitazionale:

$$V_g = mgz$$

e quello elastico

$$V_{el} = \frac{1}{2}K\Big(2z^2) = Kz^2$$

da cui abbiamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(2\dot{z}^2 + z^2\dot{\theta}^2) - mgz - Kz^2$$

con le equazioni del moto

$$mz^2\dot{\theta} = p_\theta = cost$$

e

$$2m\ddot{z} = mz\dot{\theta}^2 - 2Kz - mg$$

2) Gli integrali primi sono l'energia totale:

$$E = \frac{1}{2}m(2\dot{z}^2 + z^2\dot{\theta}^2) + mgz + Kz^2$$

ed il momento angolare

$$p_\theta = mz^2\dot{\theta}.$$

3) La lagrangiana di Routh si ottiene da

$$\mathcal{L}_R = \Big(\mathcal{L} - p_\theta\dot{\theta}\Big)|_{\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mz^2}} = m\dot{z}^2 - Kz^2 - mgz - \frac{p_\theta^2}{2mz^2}$$

4) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale efficace:

$$V_{eff} = Kz^2 + mgz + \frac{p_\theta^2}{2mz^2}$$

che ponendo $g = 0$ ricaviamo da

$$\frac{dV_{eff}}{dz} = 2Kz - \frac{p_\theta^2}{mz^3} = 0$$

ottenendo

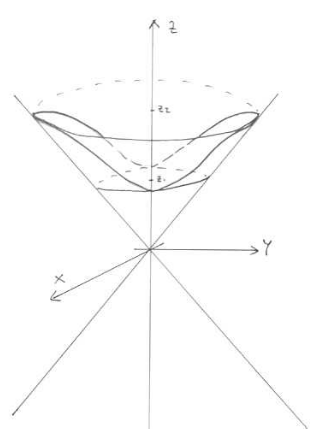
$$z_0 = \pm\Big(\frac{p_\theta^2}{2Km}\Big)^{\frac{1}{4}}$$

Per determinare la stabilitá calcoliamo la derivata seconda:

$$V''_{eff}(z) = 2K > 0$$

dunque i punti sono stabili

5) Per l'oscillatore armonico come campo di forza centrale abbiamo che le orbite nel piano x, y sono ellissi con l'angolo tra pericentro e apocentro $\Phi = \frac{\pi}{2}$ dunque le orbite sulla superficie del cono possono essere rappresentate dal seguente disegno



Soluzione Esercizio 2

1) Data la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}^2}{4} q^2 e^{q^2} \tag{1}$$

sia $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q} q^2}{2} e^{q^2}$ da cui $\dot{q} = \frac{2p}{q^2} e^{-q^2}$ e dunque

$$H = \frac{p^2}{q^2} e^{-q^2} \tag{2}$$

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{p^2}{q^3} 2e^{-q^2}(1+q^2) \tag{3}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2\frac{p}{q^2} e^{-q^2} \tag{4}$$

2) Abbiamo $\frac{dQ(q)}{dq} = qe^{\frac{q^2}{2}}$ da cui otteniamo la trasformazione:

$$P = \frac{p}{Q'(q)} = \frac{p}{q} e^{-\frac{q^2}{2}} \qquad Q = e^{\frac{q^2}{2}} \tag{5}$$

3) La nuova hamiltoniana è:

$$K(P, Q) = P^2 \tag{6}$$

con equazioni di Hamilton:

$$\dot{P} = 0, \qquad \dot{Q} = 2P$$

da cui otteniamo per i dati iniziali scelti $P(0) = e^{-\frac{1}{2}}$, $Q(0) = e^{\frac{1}{2}}$ le soluzioni

$$P(t) = P(0) = e^{-\frac{1}{2}}, \qquad Q(t) = Q(0) + 2P(0)t = e^{\frac{1}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}} t$$

Con la trasformazione inversa otteniamo:

$$q(t) = \pm\sqrt{2 \ln Q(t)} \tag{7}$$

e per il dato iniziale $q(0) = 1$ otteniamo dunque

$$q(t) = \sqrt{2 \ln(e^{\frac{1}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}} t)}$$

$$p(t) = e^{-\frac{1}{2}} q(t)(e^{\frac{1}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}} t) \tag{8}$$