Scritto di Meccanica Analitica 18-9-2008
E. Scoppola

Soluzione Esercizio 1

1) Siano x_1 e x_2 le variabili lagrangiane, abbiamo $y_1 = 0$ e $y_2 = -ax_2^2$. Dunque l'energia cinetica é:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(1+4a^2x_2^2)$$

L'energia potenziale gravitazionale é

$$V_g = -m_2gax_2^2$$

e quella elastica

$$V_{el} = \frac{1}{2}K\Big((x_1-x_2)^2 + a^2x_2^4\Big)$$

La lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(1+4a^2x_2^2) + m_2gax_2^2 - \frac{1}{2}K\Big((x_1-x_2)^2 + a^2x_2^4\Big) \quad (1)$$

Le equazioni del moto sono:

$$m_1\ddot{x}_1 = -Kx_1 + Kx_2 \quad (2)$$

$$m_2\ddot{x}_2(1+4a^2x_2^2) = -4m_2a^2x_2\dot{x}_2^2 + 2m_2gax_2 - K(x_1-x_2) + 2Ka^2x_2^3 \quad (3)$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = K(x_1-x_2) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = -2m_2gax_2 + Kx_2 - Kx_1 + 2Ka^2x_2^3 = 0 \quad (5)$$

da cui

$$x_1 = x_2 \quad (6)$$

e

$$2ax_2(Kax_2^2 - m_2g) = 0$$

e dunque i punti critici:

$$(0,0) \qquad (\pm\sqrt{\frac{m_2 g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2 g}{Ka}}) \tag{7}$$

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta, x) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & -2m_2 ga + K + 6Ka^2 x_2^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

nei diversi punti critici.

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & -2m_2 ga + K \end{pmatrix} \tag{9}$$

che ha determinante negativo dunque il punto $(0,0)$ è instabile.

$$V''(\pm\sqrt{\frac{m_2 g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2 g}{Ka}}) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K + 4m_2 ga \end{pmatrix} \tag{10}$$

ha determinante e traccia positivi e dunque questi due punti sono stabili.

3) Intorno a ciascuno dei due punti di equilibrio stabile $(\pm\sqrt{\frac{m_2 g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2 g}{Ka}})$ la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (x_1, x_2)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_\pm, V''(\pm\sqrt{\frac{m_2 g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2 g}{Ka}})(\mathbf{q} - \mathbf{q}_\pm)) \tag{11}$$

con $\mathbf{q}_\pm = (\pm\sqrt{\frac{m_2 g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2 g}{Ka}})$

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2(1 + \frac{4am_2 g}{K}) \end{pmatrix} \tag{12}$$

4) Se $x_1 = 0$ abbiamo

$$V = -m_2 ga x_2^2 - \frac{1}{2}K\left(x_2^2 + a^2 x_2^4\right)$$

Dobbiamo distinguere due casi

i) $2m_2 ga > K$

ii) $2m_2 ga \leq K$

Nel caso i) la funzione V ha un massimo in 0 e due minimi in $\pm\sqrt{\frac{2mga-K}{2Ka^2}}$ in questo caso gli unici dati iniziali cui non fa seguito un moto periodico sono quelli per cui l'energia totale é nulla oppure nei due punti di equilibrio $\pm\sqrt{\frac{2mga-K}{2Ka^2}}$ con velocitá iniziale nulla.

Nel caso ii) il potenziale é sempre positivo con unico punto critico in 0 e dunque l'unico dato iniziale cui non fa seguito un moto periodico é quello con energia totale nulla.

Soluzione Esercizio 2

1)
$$\dot{p} = -3p - 2q = -\frac{\partial}{\partial q}(3pq + q^2 + f(p))$$

per qualunque funzione $f(p)$

$$\dot{q} = 4p + 3q = \frac{\partial}{\partial p}(3pq + 2p^2 + g(q))$$

per qualunque funzione $g(q)$ dunque il sistema é Hamiltoniano con Hamiltoniana $H(p,q) = 3pq + q^2 + 2p^2$.

2) La trasformazione canonica generata da $F(q,P)$ si ottiene da:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{q}{2} + \frac{P}{2}, \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{P}{2} + \frac{q}{2}$$

da cui
$$P = 2p + q, \qquad Q = p + q$$

3) Abbiamo $K(P,Q) = PQ$ che ha equazioni di Hamilton

$$\dot{P} = -P, \qquad \dot{Q} = Q$$

con soluzioni
$$P(t) = P(0)e^{-t}, \qquad Q(t) = Q(0)e^{t}$$

con $P(0) = 3$, $Q(0) = 2$. Usando la trasformazione canonica inversa otteniamo

$$p = P - Q = 3e^{-t} - 2e^{t}, \qquad q = 2Q - P = 4e^{t} - 3e^{-t}$$