II Esonero di Meccanica Analitica 9-6-08

E. Scoppola, A.Gaudillière

Soluzione

1) Imponiamo che il determinante dello jacobiano sia uno:

$$g'(p)\sinh q p^{\alpha}\sinh q - g(p)\cosh q \alpha p^{\alpha-1}\cosh q = 1$$

che implica

$$g'(p)p^{\alpha} = g(p)\alpha p^{\alpha-1} = -1$$

cioé

$$\frac{g'(p)}{g(p)} = \frac{\alpha}{p} \qquad \Rightarrow g(p) = C\,p^{\alpha}$$

e

$$C\,p^{2\alpha-1}\alpha = -1$$

da cui otteniamo

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad g(p) = -2p^{\frac{1}{2}}$$

2) La trasformazione

$$P = -2p^{\frac{1}{2}}\sinh q, \qquad Q = p^{\frac{1}{2}}\cosh q$$

ha una funzione generatrice di prima specie $F(q,Q)$ che soddisfa

$$p = \frac{Q^2}{\cosh^2 q} = \frac{\partial F(q,Q)}{\partial q}, \quad P = -2\frac{Q}{\cosh q}\sinh q = -\frac{\partial F(q,Q)}{\partial Q}$$

da cui otteniamo $F(q,Q) = Q^2\tanh q$.

3) Nelle nuove variabili l'hamiltoniana diventa

$$K(P,Q) = Q^2$$

e le soluzioni delle equazioni di Hamilton sono banalmente

$$Q(t) = cost = Q(0), \qquad P(t) = P(0) - 2Q(0)t$$

che poste nella trasformazione inversa

$$q = -\tanh^{-1}\frac{P}{2Q}, \qquad p = Q^2 - \frac{P^2}{4}$$

forniscono le soluzioni:

$$q = -\tanh^{-1}\frac{P(0)-2Q(0)t}{2Q(0)}, \qquad p = Q(0)^2 - \frac{(P(0)-2Q(0)t)^2}{4}$$