

I Esonero di Meccanica Analitica: 28-4-2009

E. Scoppola, A.Gaudillière

Esercizio

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è costituito da un'asta sottile AB , rigida, omogenea di lunghezza $2r$ e massa M e da un anello rigido, omogeneo di raggio r e massa m . Gli estremi A e B dell'asta sono vincolati senza attrito a scorrere sull'anello e l'anello è vincolato a rotolare senza strisciare all'interno di una guida circolare di raggio $2r$. Il centro dell'asta, coincidente col centro dell'anello C , è collegato all'asse verticale y passante per il centro O della guida da una molla ideale di costante K e lunghezza a riposo nulla..

Si considerino come variabili lagrangiane gli angoli θ e ϕ che rispettivamente OC ed AB formano con l'asse verticale.

- 1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- 2) Individuare una variabile ciclica e gli integrali primi. Scrivere la lagrangiana di Routh associata.
- 3) Trovare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri in gioco.
- 4) Determinare la lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno ad un punto di equilibrio stabile.
- 5) Se il piano Π viene posto in rotazione con velocità angolare costante ω attorno all'asse y determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale col piano Π .
- 6) (*facoltativo*) Determinare i punti di equilibrio stabili in questa nuova situazione nel caso $\omega^2 = \frac{K}{2(m+M)} = \frac{g}{2r}$.