II Esonero di Meccanica Analitica del 12-6-2009
E. Scoppola

Soluzione

1) Abbiamo $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{q^6}$ da cui $\dot{q} = pq^6$ e dunque

$$H = \frac{p^2 q^6}{2} - \frac{1}{2q^2} \tag{1}$$

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -3p^2 q^5 - q^{-3} \tag{2}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = pq^6 \tag{3}$$

2)

$$Q'(q) = -q^{-3}$$

da cui la trasformazione è canonica se

$$P = -pq^3$$

3) La nuova hamiltoniana è:

$$K(P,Q) = \frac{P^2}{2} - Q \tag{4}$$

con equazioni di Hamilton:

$$\dot{P} = 1 \qquad \dot{Q} = P \tag{5}$$

le cui soluzioni sono

$$P(t) = P(0) + t, \qquad Q(t) = Q(0) + P(0)t + \frac{1}{2}t^2 \tag{6}$$

con dati iniziali $Q(0) = \frac{1}{2}$ e $P(0) = 0$ e dunque

$$P(t) = t, \quad Q(t) = \frac{1}{2}(1 + t^2).$$

Con la trasformazione inversa otteniamo:

$$q(t) = \pm\sqrt{\frac{1}{2Q}} = \sqrt{\frac{1}{1+t^2}} \tag{7}$$

avendo scelto il segno + poiché per ipotesi $q > 0$ e

$$p(t) = -\frac{P}{q^3} = -t(1+t^2)^{\frac{3}{2}} \tag{8}$$

4) Usiamo l'equazione di Hamilton-Jacobi indipendente dal tempo.

$$\frac{q^6}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial q}\Big)^2-\frac{1}{2q^2}=\alpha \tag{9}$$

da cui

$$\frac{\partial W}{\partial q}=\pm\sqrt{\frac{2}{q^6}(\alpha+\frac{1}{2q^2})}=\pm\frac{1}{q^3}\sqrt{2\alpha+\frac{1}{q^2}} \tag{10}$$

e dunque

$$\beta=\beta(0)+t=\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\pm\int_{q(0)}^{q}\frac{1}{q^3}\frac{1}{\sqrt{2\alpha+\frac{1}{q^2}}}dq' \tag{11}$$

che possiamo integrare col cambiamento di variabile $y=2\alpha+\frac{1}{q^2}$ ottenendo

$$C+t=\sqrt{2\alpha+\frac{1}{q^2}}$$

cioè

$$(C+t)^2=2\alpha+\frac{1}{q^2}$$

e dai dati iniziali e dall'equazione precedente otteniamo $\alpha=-\frac{1}{2}$ e $C=0$, da cui la soluzione

$$q(t)=\sqrt{\frac{1}{1+t^2}}$$

avendo scelto il segno $+$ perché $q>0$ e

$$p(t)=\frac{\partial W}{\partial q}=\pm\frac{1}{q^3}\sqrt{2\alpha+\frac{1}{q^2}}=\pm\frac{1}{q^3}t=-t(1+t^2)^{\frac{3}{2}}$$

scegliendo il segno - poiché dall'equazione di Hamilton abbiamo $\dot{p}\leq 0$ che con $p(0)=0$ dà $p(t)\leq 0$ per ogni t.