Scritto di Meccanica Analitica del 17-6-2009
E. Scoppola

Soluzione

1) Dal teorema di Koenig abbiamo per l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\phi}^2$$

L'energia potenziale, a meno di termini costanti, è data da:

$$V = mgy + \frac{1}{2}K(y^2 - ly\cos\phi)$$

e dunque la lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\phi}^2 - mgy - \frac{1}{2}K(y^2 - ly\cos\phi)$$

con equazioni del moto:

$$m\ddot{y} = -mg - Ky + \frac{Kl}{2}\cos\phi$$

$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\phi} = -\frac{Kl}{2}y\sin\phi$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale soluzioni di

$$mg + Ky - \frac{Kl}{2}\cos\phi = 0$$

$$\frac{Kl}{2}y\sin\phi = 0$$

cioè i punti

$$P_1 = (\frac{l}{2} - \frac{mg}{K}, 0), \quad P_2 = (-\frac{l}{2} - \frac{mg}{K}, \pi)$$

e se $\lambda := \frac{2mg}{Kl} < 1$ anche i punti

$$P_{3,4} = (0, \arccos\lambda)$$

Per discutere la stabilità valutiamo la matrice hessiana di V:

$$V''(y,\phi) = \begin{pmatrix} K & \frac{Kl}{2}\sin\phi \\ \frac{Kl}{2}\sin\phi & \frac{Kl}{2}y\cos\phi \end{pmatrix} \tag{1}$$

nei diversi punti critici. Per il punto P_1 otteniamo

$$V''(P_1) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{Kl}{2}(\frac{l}{2} - \frac{mg}{K}) \end{pmatrix} \tag{2}$$

e dunque il punto è stabile per $\lambda < 1$ e instabile per $\lambda > 1$. Per il punto P_2 otteniamo

$$V''(P_2) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \frac{Kl}{2}(\frac{l}{2} + \frac{mg}{K}) \end{pmatrix} \tag{3}$$

e dunque il punto è stabile sempre. Per i punti $P_{3,4}$ otteniamo

$$V''(P_{3,4}) = \begin{pmatrix} K & \frac{Kl}{2}\sin\phi_{3,4} \\ \frac{Kl}{2}\sin\phi_{3,4} & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

che ha determinante negativo e dunque i punti sono instabile, quando esistono. Per continuità otteniamo che per $\lambda = 1$ il punto P_1 è instabile.

3) Intorno al punto P_2 la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (y, \phi)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), V''(P_2))(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)) \tag{5}$$

con $\mathbf{q}_0 := (-\frac{l}{2} - \frac{mg}{K}, \pi)$ e

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Le pulsazioni proprie delle piccole oscillazioni si ottengono dall'equazione

$$det \begin{pmatrix} K - \omega^2 m & 0 \\ 0 & \frac{Kl}{2}(\frac{l}{2} + \frac{mg}{K}) - \omega^2\frac{ml^2}{12} \end{pmatrix} = 0$$

da cui

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m}, \qquad \omega_2^2 = 3\frac{K}{m} + 6\frac{g}{l}$$

4) Nel caso $\phi = 0$ otteniamo il potenziale

$$V(y) = mgy + \frac{1}{2}K(y^2 - ly)$$

che è una parabola, con derivata seconda positiva, con unico punto critico, che è un minimo, in $y_0 = \frac{l}{2} - \frac{mg}{K}$. Dunque possiamo concludere che tutti i moti sono periodici eccetto i dati iniziali $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$ caso in cui non c'e' moto.