Scritto di Meccanica Analitica del 28-4-09

E. Scoppola

Soluzione

1) Le coordinate di C sono

$$x_C = r\sin\theta, \quad y_C = -r\cos\theta$$

da cui $v_C^2 = r^2\dot\theta^2$. La condizione di rotolamento dell'anello, chiamando $\dot\chi$ la velocità di rotazione dell'anello attorno a C, si scrive $r^2\dot\chi^2 = v_C^2$ da cui $\dot\chi^2 = \dot\theta^2$ e quindi utilizzando il teorema di Koenig otteniamo

$$T = T_{AB} + T_a = \frac{1}{2}(m+M)v_C^2 + \frac{1}{2}\frac{M(2r)^2}{12}\dot\phi^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2$$

Il potenziale gravitazionale:

$$V_g = -(m+M)gr\cos\theta$$

e quello elastico

$$V_{el} = \frac{1}{2}K\Big(r\sin\theta\Big)^2$$

da cui abbiamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(2m+M)r^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{3}\dot\phi^2 + (m+M)gr\cos\theta - \frac{1}{2}K\Big(r\sin\theta\Big)^2$$

con le equazioni del moto

$$(2m+M)r^2\ddot\theta = -(m+M)gr\sin\theta - Kr^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{Mr^2}{3}\dot\phi = 0$$

2) Gli integrali primi sono l'energia totale:

$$E = \frac{1}{2}(2m+M)r^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{3}\dot\phi^2 - (m+M)gr\cos\theta + \frac{1}{2}K\Big(r\sin\theta\Big)^2$$

ed il momento angolare

$$p_\phi = \frac{Mr^2}{3}\dot\phi$$

Osservando che $\dot\phi = cost$ la lagrangiana di Routh diventa

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2}(2m+M)r^2\dot\theta^2 + (m+M)gr\cos\theta - \frac{1}{2}K\Big(r\sin\theta\Big)^2$$

3) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$V'(\theta) = (m+M)gr\sin\theta + Kr^2\sin\theta\cos\theta = r\sin\theta\Big[(m+M)g + Kr\cos\theta\Big] = 0$$

da cui $\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi$ e se $\lambda = \frac{(m+M)g}{Kr} < 1$ anche $\theta_{3,4} = \arccos -\lambda$.

Per determinare la stabilitá calcoliamo la derivata seconda:

$$V''(\theta) = r\cos\theta\Big[(m+M)g + Kr\cos\theta\Big] - Kr^2\sin^2\theta$$

dunque il punto θ_1 è stabile, il punto θ_2 è stablile se $\lambda < 1$ e instabile se $\lambda > 1$ e i punti $\theta_{3,4}$, quando esistono, cioè nel caso $\lambda < 1$, sono instabili. Nel caso $\lambda = 1$ il punto θ_2 è instabile come si può dedurre per continuità nel parametro λ o guardando alle derivate successive del potenziale.

4) Intorno al punto $\theta_1 = 0$ la lagrangiana delle piccole oscillazioni si scrive:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(2m+M)r^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}r\Big[(m+M)g + Kr\Big]\theta^2$$

5) Se il piano Π è posto in rotazione, nel sistema di riferimento solidale con Π, la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \mathcal{L} - V_{centr}$$

con $V_{centr} = V_{centr,AB} + V_{centr,a}$ e

$$V_{centr,AB} = -\frac{1}{2}\omega^2\bar{\lambda}\int_{-r}^{r} dx(r\sin\theta + x\sin\phi)^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 Mr^2\sin^2\theta - \frac{1}{2}\omega^2 M\frac{r^2}{3}\sin^2\phi$$

avendo denotato con $\bar{\lambda}$ la densità lineare di massa dell'asta;

$$V_{centr,a} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2\sin^2\theta$$

6) I punti di equilibrio in questa nuova situazione sono i punti critici del potenziale

$$V_{\mathcal{K}}(\theta,\phi) = -(m+M)gr\cos\theta + \frac{1}{2}K\Big(r\sin\theta\Big)^2 - \frac{1}{2}\omega^2(m+M)r^2\sin^2\theta - \frac{1}{2}\omega^2 M\frac{r^2}{3}\sin^2\phi =$$

$$= -(m+M)gr\cos\theta + \frac{1}{2}K'\Big(r\sin\theta\Big)^2 - \frac{1}{2}\omega^2 M\frac{r^2}{3}\sin^2\phi$$

con $K' = K - \omega^2(m+M) = \frac{K}{2}$.

In questo caso la variabile ϕ non è più ciclica, anche se il potenziale è somma di una funzione dipendente solo dalla variabile θ e di un'altra funzione dipendente solo dalla variabile ϕ, permettendo così di trovare i punti critici risolvendo indipendentemente le equazioni per θ e per ϕ. Per quanto riguarda la variabile θ, l'analisi dei punti critici è identica a quella sviluppata nel punto 3) con λ' al posto di λ, e con $\lambda' = 2$ per la scelta dei parametri data al punto 6). Studiando poi i punti critici della funzione $-\frac{1}{2}\omega^2 M \frac{r^2}{3} \sin^2 \phi$ otteniamo che ad ogni coordinata $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$ va associata la coordinata $\phi = 0, \pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ per un totale di 8 punti critici di cui i punti stabili sono $(0, \frac{1}{2}\pi)$ e $(0, \frac{3}{2}\pi)$.