Scritto di Meccanica Analitica del 9-9-2009

Soluzione

1) Dal teorema di Koenig abbiamo per l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale è data da:

$$V = mgy+\frac{1}{2}K\Big[(\frac{l}{2}\sin\theta)^2+(y-\frac{l}{2}\cos\theta)^2+(\frac{l}{2}\sin\theta)^2+(y-\frac{l}{2}\cos\theta)^2\Big] = mgy+Ky^2$$

a meno di termini costanti, e dunque la lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 - mgy - Ky^2$$

con equazioni del moto:

$$m\ddot{y} = -mg - 2Ky$$

$$\frac{ml^2}{12}\ddot{\theta} = 0$$

2) Si conserva l'energia totale

$$E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 + mgy + Ky^2$$

e, poiché θ è una variabile ciclica, anche il momento angolare associato $p_\theta = \frac{ml^2}{12}\dot{\theta}$, in questo caso la velocità $\dot{\theta}$ è costante.

3) Le equazioni del moto sono disaccoppiate e sono facilmente risolubili. Otteniamo:

$$\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)t$$

$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi) - \frac{mg}{2K}$$

con $\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ e A e ϕ dipendenti dai dati iniziali.

4) Il potenziale centrifugo è dato da

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega_0^2\rho\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}(x\sin\theta)^2dx = -\frac{1}{2}\omega_0^2\frac{ml^2}{12}\sin^2\theta$$

da cui la nuova lagrangiana è

$$\mathcal{L}_K = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 - mgy - Ky^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\frac{ml^2}{12}\sin^2\theta$$

5) I punti di equilibrio si ottengono studiando i punti critici del potenziale

$$V_K = mgy + Ky^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2 \frac{ml^2}{12} \sin^2\theta$$

e sono soluzioni di

$$\frac{\partial V_K}{\partial y} = mg + 2Ky = 0$$

$$\frac{\partial V_K}{\partial \theta} = -\omega_0^2 \frac{ml^2}{12} \sin\theta\cos\theta = 0$$

cioè i quattro punti con $y = -\frac{mg}{2K}$ e $\theta = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$. Per discutere la stabilità valutiamo la matrice hessiana di V, è una matrice diagonale

$$V''(y,\phi) = \begin{pmatrix} 2K & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 \frac{ml^2}{12}\cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{1}$$

e dunque i punti con $\theta = 0, \pi$ sono instabili e gli altri stabili.

6) Dalla trasformata di Legendre di $\mathcal{L}$ otteniamo:

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{6}{ml^2} p_\theta^2 + mgy + Ky^2$$

a cui corrisponde l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial W}{\partial y}\Big)^2 + \frac{6}{ml^2}\Big(\frac{\partial W}{\partial \theta}\Big)^2 + mgy + Ky^2 = E.$$

L'equazione è a variabili separate e può dunque essere riscritta come

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} = \alpha_1$$

$$\frac{1}{2m}\Big(\frac{\partial W_y}{\partial y}\Big)^2 + mgy + Ky^2 = \alpha_2,$$

con $W = W_\theta(\theta, \alpha_1) + W_y(y, \alpha_2)$ ed $E = \frac{6}{ml^2}\alpha_1^2 + \alpha_2$. Dunque

$$W_\theta = \alpha_1 \theta, \qquad W_y = \pm\sqrt{2m}\int dy \sqrt{\alpha_2 - Ky^2 - mgy}$$

Applicando il metodo di Hamilton-Jacobi otteniamo dunque

$$\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W_\theta}{\partial \alpha_1} = \theta$$

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial W_y}{\partial \alpha_2} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{\alpha_2 - Ky^2 - mgy}} = \sqrt{\frac{m}{2K}} \arccos\Big(u\Big)$$

con

$$u = \frac{\sqrt{K}y + \frac{mg}{2\sqrt{K}}}{\alpha_2 + \frac{m^2g^2}{4K}}$$

D'altra parte abbiamo

$$\dot{\beta}_1 = \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = \frac{12}{ml^2}\alpha_1$$

da cui

$$\beta_1(t) = \theta(t) = \beta_1(0) + t\alpha_1 \frac{12}{ml^2}$$

e per la variabile y abbiamo

$$\dot{\beta}_2 = \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} = 1$$

da cui

$$\beta_2(t) = \beta_2(0) + t$$

e dunque

$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi) - \frac{mg}{2K}.$$

7)

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{6}{ml^2}p_\theta^2 + mgy + Ky^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2\frac{ml^2}{12}\sin^2\theta$$

con equazioni di Hamilton

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -mg - 2Ky$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{ml^2}{12}\omega_0^2 \sin\theta\cos\theta$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{12}{ml^2}p_\theta$$