

Scritto di Meccanica Analitica: 13-7-2010

E. Scoppola

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è costituito da una circonferenza materiale rigida omogenea di massa M e raggio R e da un punto materiale di massa m . Un punto A della circonferenza è fissato ad un punto fisso O di un asse verticale y di Π , il punto materiale è vincolato allo stesso asse verticale y ed è collegato al centro C della circonferenza da una molla ideale di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata y del punto materiale calcolata a partire dal punto O , con l'asse y orientato verso il basso e l'angolo θ che AC forma con l'asse verticale (vedi disegno).

- 1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
- 2) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
- 3) Studiare le piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile.
- 4) Se il piano Π viene posto in rotazione attorno all'asse verticale y con velocità angolare costante ω , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione.

Scritto di Meccanica Analitica: 13-7-2010

E. Scoppola

Esercizio 2

Si considerino le funzioni

$$P(t) = 1 - t, \quad Q(t) = t - \frac{t^2}{2} + 1$$

- 1) Verificare che sono soluzioni di un sistema hamiltoniano con dati iniziali $P(0) = 1$, $Q(0) = 1$ e determinarne l'hamiltoniana $K(P, Q)$.
- 2) Determinare una trasformazione canonica tale che $Q = \frac{q^2}{2}$;
- 3) Usare la trasformazione canonica del punto 2) per risolvere le equazioni di Hamilton relative all'hamiltoniana

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2q^2} + \frac{q^2}{2}$$

con dati iniziali $q(0) = p(0) = \sqrt{2}$.

- 4) Risolvere le equazioni del moto per l'hamiltoniana del punto 3) con il metodo di Hamilton-Jacobi.