

## Scritto di Meccanica Analitica: 7-9-2010

E. Scoppola

### Esercizio 1

Si consideri un sistema meccanico costituito da un disco sottile rigido omogeneo di massa  $M$  e raggio  $r$  e da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  posti in un piano verticale  $\Pi$ . Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare all'esterno di una guida circolare di raggio  $R$  e centro  $O$  nel piano  $\Pi$ . Il punto  $P$  è vincolato senza attrito all'asse orizzontale  $x$  del piano  $\Pi$  passante per  $O$ . Il centro  $C$  del disco ed il punto  $P$  sono collegati da una molla ideale di costante  $K$  e lunghezza a riposo nulla.

Si considerino come variabili lagrangiane l'angolo  $\theta$  che  $OC$  forma con l'asse verticale  $y$  per  $O$  e la coordinata  $x$  del punto  $P$ .

- 1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
- 2) Determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità al variare dei parametri in gioco.
- 3) Studiare le piccole oscillazioni (lagrangiana delle piccole oscillazioni ed equazione per le pulsazioni proprie) intorno ad una posizione di equilibrio stabile, nel caso  $Mg > K(R + r)$ .
- 4) Se il piano  $\Pi$  è posto in rotazione attorno all'asse verticale  $y$ , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con  $\Pi$ .
- 5) Se si aggiunge il vincolo  $x = 0$  determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico.

**Scritto di Meccanica Analitica: 7-9-2010**

E. Scoppola

**Esercizio 2**

Si considerino l'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} e^{-2q}$$

- 1) Determinare le equazioni del moto.
- 2) Determinare la lagrangiana associata.
- 3) Determinare la trasformazione canonica generata da  $F(q, Q) = Q^2 e^q$  e determinare la nuova hamiltoniana.
- 4) Usare la trasformazione canonica trovata al punto 3) per risolvere le equazioni con dati iniziali  $p(0) = 1$ ,  $q(0) = 0$ .
- 5) Risolvere le equazioni del moto col metodo di Hamilton-Jacobi.