Scritto di Meccanica Analitica del 13-7-2010
E. Scoppola

Soluzione

1) L'energia cinetica si può calcolare utilizzando il teorema di Steiner. Osserviamo che, avendo orientato l'asse y verso il basso abbiamo:

$$x_C = R\sin\theta \qquad y_c = R\cos\theta$$

e dunque

$$T = \frac{1}{2}\Big(2MR^2\Big)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

L'energia potenziale è la somma del potenziale gravitazionale e di quello elastico

$$V = -mgy - MgR\cos\theta + \frac{1}{2}K(y^2 - 2Ry\cos\theta)$$

La lagrangiana è quindi:

$$\mathcal{L} = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy + MgR\cos\theta - \frac{1}{2}K(y^2 - 2Ry\cos\theta) \qquad (1)$$

Le equazioni del moto sono:

$$2MR^2\ddot{\theta} = -MgR\sin\theta - KRy\sin\theta \qquad (2)$$

$$m\ddot{y} = mg - Ky + KR\cos\theta \qquad (3)$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = R\sin\theta(Mg + Ky) = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Ky - KR\cos\theta - mg = 0 \qquad (5)$$

da cui i punti critici:

$$(\theta_1, y_1) = (0, \frac{mg}{K} + R) \qquad (\theta_2, y_2) = (\pi, \frac{mg}{K} - R) \qquad (6)$$

e se $\lambda := \frac{(M+m)g}{KR} < 1$ anche $(\theta_{3,4}, y_{3,4})$ con $\theta_{3,4} = \arccos(-\lambda)$ e $y_3 = y_4 = \frac{-Mg}{K}$.

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta, y) = \begin{pmatrix} R\cos\theta(Mg + Ky) & KR\sin\theta \\ KR\sin\theta & K \end{pmatrix} \tag{7}$$

nei diversi punti critici.

$$V''(\theta_1, y_1) = \begin{pmatrix} R(Mg + mg + KR) & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{8}$$

e dunque il punto di equilibrio (θ_1, y_1) è stabile;

$$V''(\theta_2, y_2) = \begin{pmatrix} -R(Mg + mg - KR) & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{9}$$

che è instabile per $\lambda \geq 1$ e stabile per $\lambda < 1$. Per $\lambda < 1$ abbiamo per i punti $'(\theta_{3,4}, y_{3,4})$:

$$V''(\theta_{3,4}, y_{3,4}) = \begin{pmatrix} 0 & \mp KR\sin\theta_{3,4} \\ \mp KR\sin\theta_{3,4} & K \end{pmatrix} \tag{10}$$

che ha determinante negativo e dunque i punti di equilibrio $(\theta_{3,4}, y_{3,4})$ sono instabili quando esistono.

3) La lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno al punto $\mathbf{x}_1 = (\theta_1, y_1)$ si può scrivere in forma vettoriale, con $\mathbf{x} = (\theta, y)$:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}, A\dot{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{x} - \mathbf{x}_1), V"(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1))$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 2MR^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

con pulsazioni proprie

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K(\lambda + 1)}{2M}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

4) Per calcolare la lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione bisogna sottrarre alla lagrangiana trovata al punto 1) il potenziale centrifugo che si ottiene calcolando

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2 \rho R \int_0^{2\pi} (R\sin\theta + R\cos\phi)^2 d\phi = -\frac{1}{2}\omega^2 m R^2 \sin^2\theta + cost$$

Esercizio 2

1) Otteniamo

$$\dot{P}(t) = -1, \qquad \dot{Q}(t) = 1 - t = P(t)$$

da cui

$$K(P,Q) = \frac{P^2}{2} + Q \tag{11}$$

2) La trasformazione $P = \frac{p}{q}$, $Q = \frac{q^2}{2}$ è canonica.

3) Nelle variabili P, Q l'hamiltoniana H diventa la (11) con dati iniziali $P(0) = Q(0) = 1$ e dunque le soluzioni sono:

$$q(t) = \sqrt{2Q(t)} = \sqrt{2t - t^2 + 2}, \quad p(t) = P(t)q(t) = (1-t)\sqrt{2t - t^2 + 2}.$$

4) L'equazione di Hamilton-Jacobi relativa all'hamiltoniana $H(p,q)$ è:

$$\frac{1}{2q^2}\Big(\frac{\partial W}{\partial q}\Big)^2 + \frac{q^2}{2} = \alpha$$

da cui otteniamo

$$\Big(\frac{\partial W}{\partial q}\Big) = \pm\sqrt{2q^2(\alpha - \frac{q^2}{2}}$$

e dunque

$$\beta(0) + t = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \pm \int_1^{\frac{q^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2(\alpha - y)}}$$

ed utilizzando i dati iniziali, per cui $\alpha = \frac{3}{2}$ e $\beta(0) = -1$ otteniamo dunque

$$1 - t = \sqrt{3 - q^2}$$

da cui di nuovo

$$q(t) = \sqrt{2t - t^2 + 2}, \quad p(t) = \frac{\partial W}{\partial q} = q\sqrt{3 - q^2} = \sqrt{2t - t^2 + 2}(1 - t).$$