Scritto di Meccanica Analitica del 15-6-2010

Soluzione Esercizio 1

1) L'asta AB ruota intorno al suo baricentro e dunque

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\frac{2m(2l)^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2.$$

Per l'asta CD applichiamo il teorema di Koenig:

$$T_{CD} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(\frac{1}{4} + 2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(\frac{1}{3} + 2\sin^2\theta)$$

L'energia potenziale è data da:

$$V = mg\frac{l}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}Kl^2\cos^2\theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(1 + 2\sin^2\theta) - mg\frac{l}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}Kl^2\cos^2\theta$$

con equazione del moto:

$$ml^2\ddot{\theta}(1 + 2\sin^2\theta) = -ml^2\dot{\theta}2\sin\theta\cos\theta - mg\frac{l}{2}\cos\theta + Kl^2\cos\theta\sin\theta$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$V'(\theta) = Kl^2\cos\theta(\frac{mg}{2Kl} - \sin\theta) = 0$$

con soluzioni $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \frac{3}{2}\pi$ e se $\lambda := \frac{mg}{2Kl} < 1$ anche $\theta_{3,4} = \arcsin\lambda$.
Per studiare la stabilità calcoliamo la derivata seconda di $V(\theta)$:

$$V"(\theta) = -Kl^2\sin\theta(\lambda - \sin\theta) - Kl^2\cos^2\theta$$

da cui otteniamo $V"(\frac{\pi}{2}) = -Kl^2(\lambda - 1)$ positivo se $\lambda < 1$ e negativa se $\lambda > 1$, $V"(\frac{3}{2}\pi) = Kl^2(\lambda + 1)$ positiva sempre, e $V"(\theta_{3,4} = -Kl^2\cos^2\theta_{3,4}$ negativa. Usando un argomento di continuità per il caso $\lambda = 1$ possiamo dunque concludere:

se $\lambda \leq 1$ i punti critici sono θ_1 instabile e θ_2 stabile;

se $\lambda > 1$ i punti critici sono θ_1 e θ_2 stabili e $\theta_{3,4}$ instabili.

3) Intorno al punto di equilibrio stabile θ_2 abbiamo la lagrangiana delle piccole oscillazioni:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2} m l^2 3\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K l^2 (\lambda + 1)(\theta - \theta_2)^2.$$

4) Se il piano è posto in rotazione la lagrangiana nel sistema di riferimento rotante si ottiene da quella trovata al punto 1) sottraendo il potenziale centrifugo:

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2 \rho \Big[\int_{-l}^{l} (x\cos\theta)^2 dx + \int_0^l (l+x)^2 \cos^2\theta dx \Big] = -\frac{1}{2}\omega^2 m l^2 3 \cos^2\theta.$$

Soluzione Esercizio 2

1) Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -(q + p - \frac{1}{2}), \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2p + q - \frac{3}{2}$$

2) Il flusso generato dall'hamiltonina K_0 è:

$$P(t) = P(0) - t, \qquad Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{t^2}{2}$$

da cui la trasformazione canonica generata al tempo $t = 1$, ponendo come dati iniziali le variabili p, q, è:

$$P = p - 1, \qquad Q = q + p - \frac{1}{2}$$

3) Dunque la nuova hamiltoniana, corrispondente ad H sarà:

$$K(P, Q) = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}Q^2$$

da non confondere con l'hamiltoniana introdotta per definire la trasformazione canonica. K è l'hamiltoniana di un oscillatore da cui otteniamo le soluzioni:

$$Q(t) = A\cos(t + \phi), \qquad P(t) = -A\sin(t + \phi)$$

con A e ϕ dipendenti dai dati iniziali. A $p(0) = 1, q(0) = 0$ corrispondono $P(0) = 0, Q(0) = \frac{1}{2}$ e dunque $A = \frac{1}{2}, \phi = 0$ e quindi:

$$p(t) = -\frac{1}{2}\sin t + 1, \qquad q(t) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}.$$