I Esonero di Meccanica Analitica del 28-4-2010
E. Scoppola

Soluzione

1) Per i dischi abbiamo:

$$x_{C_1} = x - 2R\cos\theta, \qquad y_{C_1} = R$$

$$x_{C_2} = x + 2R\cos\theta, \qquad y_{C_2} = R$$

da cui $v_{C_1} = \dot{x}_{C_1} = \dot{x} + 2R\dot{\theta}\sin\theta$ e $v_{C_2} = \dot{x}_{C_2} = \dot{x} - 2R\dot{\theta}\sin\theta$ e le condizioni di rotolamento $v_{C_1} = R\dot{\phi}_1,\ v_{C_2} = R\dot{\phi}_2$. Dal teorema di Koenig abbiamo per l'energia cinetica:

$$T_{dischi} = \frac{1}{2}mv_{C_1}^2 + \frac{1}{2}I\Big(\frac{v_{C_1}}{R}\Big)^2 + \frac{1}{2}mv_{C_2}^2 + \frac{1}{2}I\Big(\frac{v_{C_2}}{R}\Big)^2$$

con $I = \frac{1}{2}mR^2$ da cui

$$T_{dischi} = \frac{1}{2}m3(\dot{x}^2 + 4R^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta)$$

Per le aste abbiamo, indicando con F e G i rispettivi baricentri:

$$x_F = x - R\cos\theta, \qquad y_F = R + R\sin\theta$$

$$x_G = x + R\cos\theta, \qquad y_G = R + R\sin\theta$$

Sempre per il teorema di Koenig abbiamo per l'energia cinetica:

$$T_{aste} = \frac{1}{2}m2(\dot{x}^2 + \frac{4}{3}R^2\dot{\theta}^2)$$

Per il punto P abbiamo:

$$x_P = x, \qquad y_P = R + 2R\sin\theta$$

da cui

$$T_P = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + 4R^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta)$$

L'energia potenziale, a meno di termini costanti, è data da:

$$V = 8mRg\sin\theta + 8KR^2\cos^2\theta$$

e dunque la lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 8m + 2\dot{\theta}^2R^2\frac{11}{3}m - 8mRg\sin\theta - 8KR^2\cos^2\theta$$

con equazioni del moto:

$$\dot{x}8m = p_x = cost$$

$$4\ddot{\theta}R^2\frac{11}{3}m = -8mRg\cos\theta + 16KR^2\cos\theta\sin\theta$$

2) Le costanti del moto sono l'energia totale

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 8m + 2\dot{\theta}^2 R^2\frac{11}{3}m + 8mRg\sin\theta + 8KR^2\cos^2\theta$$

e il momento p_x proporzionale alla velocità del punto P.

3) La variabile x è ciclica e poiché $\dot{x} = cost$ otteniamo per la lagrangiana di Routh

$$\mathcal{L}_R = 2\dot{\theta}^2 R^2\frac{11}{3}m - 8mRg\sin\theta - 8KR^2\cos^2\theta$$

4) Per quanto riguarda i punti di equilibrio e la loro stabilità il problema è del tutto equivalente ad un sistema con due aste identiche AB e CD con A e D vincolati a scorrere su una retta orizzontale e connessi da una molla e B coincidente con C vincolato a scorrere sull'asse y.

I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale soluzioni di

$$8mRg\cos\theta - 16KR^2\cos\theta\sin\theta = 16KR^2\cos\theta(\frac{mg}{2KR} - \sin\theta) = 0$$

cioè i punti $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \frac{3}{2}\pi$ e se $\lambda = \frac{mg}{2KR} < 1$ anche i punti $\theta_{3,4} = \arcsin\lambda$. Per la stabilità calcoliamo la derivata seconda del potenziale

$$V"(\theta) = -16R^2K\sin\theta[\lambda - \sin\theta] - 16R^2K\cos^2\theta$$

che è positiva sempre in θ_2 che corrisponde dunque ad una posizione di equilibrio stabile. In θ_1 la derivata seconda è positiva se $\lambda < 1$ e negativa se $\lambda > 1$, mentre nei punti $\theta_{3,4}$è negativa. Dunque per $\lambda > 1$ il punto θ_1 è instabile mentre è stabile quando $\lambda < 1$ e in questo caso sono presenti gli altri punti di euilibrio $\theta_{3,4}$ che sono instabili. Per continuità, o studiando il segno delle derivate successive, possiamo concludere che per $\lambda = 1$ il punto θ_1 è instabile.

C'e' da osservare che esiste un altro regime del sistema in cui le aste si muovono sovrapposte. In effetti la varietà che descrive il sistema non è differenziabile giacché le configurazioni corrispondenti a $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3}{2}\pi$ sono di snodo tra i due regimi. Il regime con le aste sovrapposte è banale poiché in questo caso la molla è a riposo ed è dunque attiva solo la forza peso.

5) Intorno al punto θ_2 la lagrangiana delle piccole oscillazioni è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = 2\dot{\theta}^2 R^2 \frac{11}{3} m - \frac{1}{2} 16 R^2 K[\lambda + 1](\theta - \frac{3}{2}\pi)^2$$

Le pulsazioni proprie delle piccole oscillazioni sono $\omega^2 = \frac{12K(\lambda+1)}{11m}$

6) Il potenziale

$$V(\theta) = 8KR^2(\cos^2\theta + 2\lambda \sin\theta)$$

nel caso $\lambda > 1$ ha un massimo in θ_1 e un minimo in θ_2 con $V(\theta_1) = 16KR^2\lambda$ e $V(\theta_2) = -16KR^2\lambda$ e dunque abbiamo moti periodici oscillatori per dati iniziali $\theta(0), \dot{\theta}(0)$ tali che l'energia $E \in (-16KR^2\lambda, 16KR^2\lambda)$ e moti periodici di rotazione per $E > 16KR^2\lambda$. Nel caso $\lambda < 1$ il potenziale ha 2 massimi in $\theta_{3,4}$ e due minimi in θ_1 e θ_2 con $V(\theta_{3,4}) = 8KR^2(1-\lambda^2+2\lambda^2) = 8KR^2(1+\lambda^2)$ per cui abbiamo moti periodici oscillatori per dati iniziali corrispondenti ad energia $E \in (16KR^2\lambda, 8KR^2(1+\lambda^2))$ e θ nell'intervallo corrispondente intorno a θ_1, contenuto all'interno di $[\theta_3, \theta_4]$; oppure $E \in (-16KR^2\lambda, 16KR^2\lambda)$ e θ entro l'intervallo corrispondente intorno a θ_2, contenuto in $[\theta_4, \theta_3]$; infine abbiamo moti periodici di rotazione per $E > 8KR^2(1+\lambda^2)$.