II Esonero di Meccanica Analitica 9-6-08

E. Scoppola, S.Simonella

Soluzione

i) Per verificare che il sistema è hamiltoniano e determinare l'hamiltoniana basta imporre

$$\dot{p} = -p^2(q+1) - \frac{1}{q+1} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

da cui $H(p,q) = \frac{p^2}{2}(q+1)^2 + \ln(q+1) + h(p)$, e

$$\dot{q} = p(q+1)^2 = \frac{\partial H}{\partial p}$$

da cui

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2}(q+1)^2 + \ln(q+1).$$

Per ricavare la lagrangiana basta fare la trasformata di Legendre rispetto alla variabile p:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p(q+1)^2 \quad \Longrightarrow p = \frac{\dot{q}}{(q+1)^2}$$

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2(q+1)^2} - \ln(q+1).$$

ii) La trasformazione $Q = \ln(q+1)$ può essere completata in modo canonico con

$$P = p[Q']^{-1} = p(q+1)$$

iii) Nelle nuove variabili l'hamiltoniana diventa

$$K(P,Q) = \frac{P^2}{2} + Q$$

e le soluzioni delle equazioni di Hamilton sono banalmente

$$Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{t^2}{2}, \qquad P(t) = P(0) - t$$

con dati iniziali $P(0) = 0$, $Q(0) = \ln 2$ che poste nella trasformazione inversa forniscono le soluzioni:

$$q(t) = 2e^{-\frac{t^2}{2}} - 1, \quad p(t) = -\frac{t}{2}e^{\frac{t^2}{2}}$$

iv) L'hamiltoniana non dipende dal tempo per cui l'equazione di Hamilton-Jacobi può essere scritta:

$$\frac{(q+1)^2}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \ln(q+1) = \alpha$$

da cui

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{\frac{2}{(q+1)^2}(\alpha - \ln(q+1)}$$

e

$$\beta = \beta(0) + t = \pm\int_{q(0)}^{q} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dq'}{(q'+1)\sqrt{\alpha - \ln(q'+1)}} = \pm\sqrt{2}\sqrt{\alpha - \ln(q+1)}$$

dai dati iniziali otteniamo $\alpha = \ln 2$, $p = \frac{\partial W}{\partial q} < 0$ e $\beta(0) = 0$ da cui

$$q(t) = 2e^{-\frac{t^2}{2}} - 1, \quad p(t) = -\frac{t}{2}e^{\frac{t^2}{2}}$$

come al punto iii).