Scritto di Meccanica Analitica del 7-9-2010
E. Scoppola

Soluzione Esercizio 1

1) Le coordinate del centro del disco sono

$$x_C = (R + r)\sin\theta, \qquad y_C = -(R + r)\cos\theta$$

e la condizione di puro rotolamento è data da:

$$(R + r)\dot\theta = r\dot\phi$$

avendo indicato con $\dot\phi$ la velocità angolare con cui il disco ruota attorno al suo centro. Dal teorema di Koenig abbiamo per l'energia cinetica del disco:

$$T_d = \frac{1}{2}M(R + r)^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\dot\phi^2 = \frac{1}{2}M(R + r)^2\frac{3}{2}\dot\theta^2$$

e dunque l'energia cinetica totale è:

$$T = \frac{1}{2}M(R + r)^2\frac{3}{2}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\dot x^2$$

L'energia potenziale, a meno di termini costanti, è data da:

$$V = -Mg(R + r)\cos\theta + \frac{1}{2}K\Big[x^2 - 2(R + r)x\sin\theta\Big]$$

definendo per brevita' $\rho := R + r$, otteniamo la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\rho^2\frac{3}{2}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\dot x^2 + Mg\rho\cos\theta - \frac{1}{2}K\Big[x^2 - 2\rho x\sin\theta\Big]$$

con equazioni del moto:

$$\frac{3}{2}M\rho\ddot\theta = -Mg\sin\theta + Kx\cos\theta$$

$$m\ddot x = -Kx + K\rho\sin\theta.$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale soluzioni di

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = Mg\rho\sin\theta - K\rho x\cos\theta = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = Kx - K\rho\sin\theta = 0$$

da cui $x = \rho\sin\theta$ che sostituito nella prima dà:

$$\rho\sin\theta\Big[Mg - K\rho\cos\theta\Big] = 0$$

cioè i punti

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (\pi, 0)$$

e se $\lambda := \frac{Mg}{K\rho} < 1$ anche i punti

$$P_{3,4} = (\theta_{3,4}, x_{3,4}) \quad \text{con } \theta_{3,4} = \arccos\lambda, \quad x_{3,4} = \rho \sin\theta_{3,4}.$$

Per discutere la stabilità valutiamo la matrice hessiana di V:

$$V''(\theta, x) = \begin{pmatrix} Mg\rho\cos\theta + K\rho x\sin\theta & -K\rho\cos\theta \\ -K\rho\cos\theta & K \end{pmatrix} \tag{1}$$

nei diversi punti critici. Per il punto P_1 otteniamo

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} Mg\rho & -K\rho \\ -K\rho & K \end{pmatrix} \tag{2}$$

con determinante $(K\rho)^2(\lambda - 1)$ e dunque il punto è stabile per $\lambda > 1$ e instabile per $\lambda < 1$. Per il punto P_2 otteniamo

$$V''(\pi,0) = \begin{pmatrix} -Mg\rho & K\rho \\ K\rho & K \end{pmatrix} \tag{3}$$

che ha determinante sempre negativo e dunque il punto è instabile sempre. Per i punti $P_{3,4}$ otteniamo

$$V''(\theta_{3,4}, x_{3,4}) = \begin{pmatrix} Mg\rho\lambda + K\rho^2(1-\lambda^2) & -K\rho\lambda \\ -K\rho\lambda & K \end{pmatrix} \tag{4}$$

che ha determinante

$$(K\rho)^2(1-\lambda^2) > 0 \quad \text{per } \lambda < 1$$

e dunque i punti sono stabili, quando esistono. Per continuità otteniamo che per $\lambda = 1$ il punto P_1 è stabile.

3) Intorno al punto P_1, che è stabile per $Mg > K\rho$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (\theta, x)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q}, V''(0,0))\mathbf{q}) \tag{5}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M\rho^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \tag{6}$$

Le pulsazioni proprie delle piccole oscillazioni si ottengono dall'equazione

$$det \begin{pmatrix} Mg\rho - \omega^2\frac{3}{2}M\rho^2 & -K\rho \\ -K\rho & K - \omega^2 m \end{pmatrix} = 0$$

4) Nel riferimento solidale con Π la nuova lagrangiana si scrive

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \mathcal{L} - V_{centr}$$

con

$$V_{centr} = -\frac{1}{2}\omega^2 m x^2 - \frac{1}{2}\omega^2 M \rho^2 \sin^2\theta$$

5) Nel caso $x = 0$ otteniamo il potenziale

$$V(\theta) = -Mg\rho\cos\theta$$

dunque possiamo concludere che tutti i moti sono periodici eccetto che per $E = \pm Mg\rho$ cioè i dati iniziali $\theta(0) = 0,\ \dot{\theta}(0) = 0$, caso in cui non c'e' moto, e $\theta(0), \dot{\theta}(0)$ tali che

$$\frac{1}{2}M\frac{3}{2}\rho^2\dot{\theta}(0)^2 - Mg\rho\cos\theta(0) = Mg\rho.$$

Soluzione Esercizio 2

1) Le equazioni di Hamilton sono:
$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = p^2 e^{-2q}, \qquad \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = pe^{-2q}.$$

2) Abbiamo $p = \dot q e^{2q}$ da cui per trasformata di Legendre otteniamo
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot q^2 e^{2q}$$

3) Data la funzione generatrice $F(q, Q) = Q^2 e^q$ otteniamo
$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = Q^2 e^q, \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = -2Qe^q,$$
cioè la trasformazione:
$$Q = \pm\sqrt{pe^{-q}}, \qquad P = \mp 2\sqrt{pe^{-q}}e^q = \mp 2\sqrt{pe^q}.$$
La nuova hamiltoniana nelle variabili P, Q si scrive $K = \frac{Q^4}{2}$.

4) Le nuove equazioni di Hamilton sono:
$$\dot P = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -2Q^3, \qquad \dot Q = \frac{\partial K}{\partial P} = 0,$$
da cui, calcolando i dati iniziali nelle nuove variabili, $Q(0) = \pm 1$, $P(0) = \mp 2$, otteniamo
$$Q(t) = Q(0) = \pm 1, \qquad P(t) = P(0) - 2Q(0)^3 t = \mp 2(1 + t).$$
Con la trasformazione inversa otteniamo per le variabili p, q le soluzioni:
$$p = -\frac{QP}{2} = 1 + t, \qquad q = \ln(-\frac{P}{2Q}) = \ln(1 + t).$$

5) L'equazione di Hamilto-Jacobi indipendente dal tempo si scrive:
$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial q}\Big)^2 e^{-2q} = E$$
da cui
$$\frac{\partial W}{\partial q} = e^q\sqrt{2E}$$
dove abbiamo scelto il segno positivo poiché $p(0)) = 1 > 0$. Applicando il metodo di Hamilton-Jacobi otteniamo:
$$\beta = \beta(0) + t = \frac{\partial W}{\partial E} = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{2E}} e^{q'} dq' = \frac{1}{\sqrt{2E}} e^q$$
a meno di costanti che possono essere assimilate in $\beta(0)$. Dai dati iniziali abbiamo $E = \frac{1}{2}$ da cui ricaviamo $e^q = \beta(0) + t$ quindi $\beta(0) = 1$ e
$$q(t) = \ln(1 + t), \qquad p(t) = \frac{\partial W}{\partial q} = e^q = 1 + t.$$