

Compito d'esonero di Meccanica Razionale: 10-5-99

E. Scoppola, R. Raimondi

1. Si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \alpha(\dot{q}_2 q_1 - \dot{q}_1 q_2),$$

dove $\alpha \in \mathbf{R}$. Si calcoli la hamiltoniana e si scrivano le equazioni di Hamilton.

2. Si consideri la trasformazione $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ dello spazio delle fasi in se stesso, definita da

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}a}(p_1 + aq_2), \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}b}(p_2 + bq_1)$$

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2 - aq_1), \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - bq_2),$$

dove $a, b \in \mathbf{R}$. Si determini come devono essere scelti a e b in modo che T sia una trasformazione canonica.

3. Utilizzando la trasformazione canonica definita nell'esercizio 2, mostrare che, per un'opportuna scelta di a e b , la funzione hamiltoniana ottenuta nell'esercizio 1 diventa a variabili separabili e scrivere esplicitamente la hamiltoniana nelle nuove variabili. Nelle nuove variabili risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi e scrivere quindi la soluzione delle equazioni del moto nelle vecchie variabili.