

**Compito d'esame di Meccanica Razionale: 14-6-2000**  
E. Scoppola, R. Raimondi

**Esercizio**

Due punti materiali di massa  $m_1$  e  $m_2$  interagiscono mediante un potenziale  $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = (1/2)k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$ , dove con  $\mathbf{r}_{1,2}$  indichiamo i raggi vettori in  $\mathbf{R}^3$  dei due punti materiali rispetto ad un'origine data.

- 1) Usando come variabili la posizione relativa  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  e la posizione del centro di massa  $\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$ , determinare le costanti del moto e ridurre lo studio del moto relativo a quello di un punto materiale sul piano, scrivendone la lagrangiana.
- 2) Applicando il metodo di Routh determinare la lagrangiana ridotta.
- 3) Studiare qualitativamente il moto del problema unidimensionale determinando punti di equilibrio, stabilità, orbite periodiche e discutere il moto per il problema in due dimensioni.
- 4) Scrivere l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton del moto relativo.
- 5) Risolvere le equazioni del moto attraverso il metodo di Hamilton-Jacobi.
- 6) Discutere il problema in variabili azione-angolo calcolandone le frequenze e discutere la periodicità del moto.
- 7) Se si considera un gas di  $N$  molecole biatomiche sul piano, non interagenti tra di loro, ciascuna con centro di massa nell'origine e descritta dall'hamiltoniana trovata al punto 4) contenute all'interno di un cerchio di raggio  $R$  a temperatura costante  $T$ , calcolare la funzione di partizione canonica e l'energia media del gas.
- 8) Sempre nelle ipotesi del punto 7) calcolare la pressione del gas.

Per il recupero del I esonero del II modulo rispondere alle domande:

4), 5), 6).

Per il recupero del II esonero del II modulo rispondere alle domande:

4), 7), 8)

Per lo scritto del solo I modulo rispondere alle domande: 1), 2), 3).

Per lo scritto del solo II modulo rispondere alle domande:

4), 5), 6), 7), 8).

Per lo scritto totale (I modulo e II modulo) rispondere a tutte le domande.

Si ricorda che:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - \frac{b}{r^2} - cr^2}} dr = \frac{1}{2\sqrt{c}} \arcsin \frac{r^2 - \frac{a}{2c}}{\sqrt{\frac{a^2}{4c^2} - \frac{b}{c}}} \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{r^2 \sqrt{a - \frac{b}{r^2} - cr^2}} dr = -\frac{1}{2\sqrt{b}} \arcsin \frac{\frac{1}{r^2} - \frac{a}{2b}}{\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{c}{b}}} \quad (2)$$