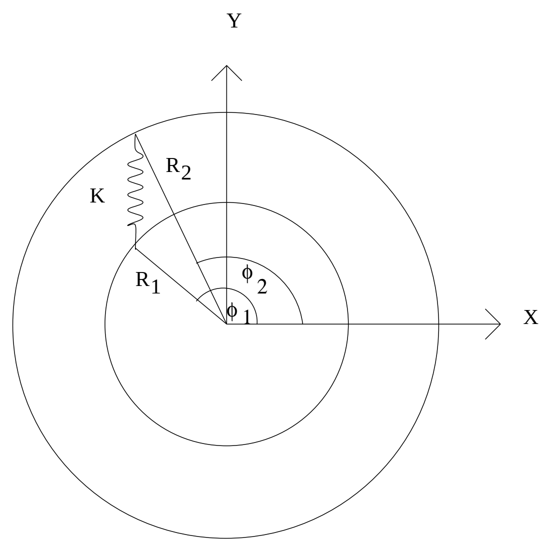
Compito d'esonero di Meccanica Razionale: 27-4-2000

E. Scoppola, R. Raimondi

Esercizio

Due punti materiali, entrambi di massa m, possono muoversi senza attrito lungo due guide circolari concentriche, poste in un piano orizzontale, di raggio R_1 e R_2 rispettivamente e sono connessi da una molla ideale di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla. Il sistema è mostrato in figura.



Dopo aver scritto la funzione di Lagrange in coordinate polari (in termini degli angoli ϕ_1 e ϕ_2), si chiede di
1) calcolare la funzione di Hamilton.
2) dimostrare, usando il formalismo hamiltoniano, che il momento angolare totale è un integrale primo.
3) verificare che la seguente trasformazione di coordinate nello spazio delle fasi è canonica

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi_1 - \phi_2 \\
\psi &= \frac{R_1}{R_2}\phi_1 + \frac{R_2}{R_1}\phi_2 \\
p_\phi &= \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} p_1 - \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} p_2 \\
p_\psi &= \frac{R_1 R_2}{R_1^2 + R_2^2}(p_1 + p_2).
\end{aligned}$$

4) verificare che, mediante la trasformazione del punto 3), la funzione di Hamilton è separabile, e risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi (Nel senso di ricondursi a quadrature).