

Compito d'esame di Meccanica Razionale: 7-9-99

E. Scoppola, R. Raimondi

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale π è costituito da un'asta AB sottile omogenea di massa M e lunghezza l e da un punto materiale P di massa m . Gli estremi A e B dell'asta sono vincolati a scorrere su di una guida circolare di raggio $R > \frac{l}{2}$ e centro O , ed il punto materiale è vincolato a scorrere sull'asta.

Il punto P è collegato al punto medio C dell'asta mediante una molla ideale di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si supponga assente ogni attrito e si assumano come coordinate lagrangiane l'angolo θ che OC forma con la verticale per O e l'ascissa ξ di P sull'asta AB .

- Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto del sistema.
- Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri in gioco.
- Determinare la lagrangiana delle piccole oscillazioni intorno ad una posizione di equilibrio stabile e determinarne il periodo.

Esercizio 2

Un sistema meccanico ad un grado di libertà è descritto dalla funzione di Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{q}^2}{\cosh^4 q} - \tanh^2 q \right).$$

Si chiede di:

- calcolare la funzione di Hamilton corrispondente;
- di dimostrare che la trasformazione

$$P = -f(q), \quad Q = \frac{p}{f'(q)}$$

è canonica e di determinare la funzione generatrice corrispondente $F(q, Q)$;

- di scegliere la funzione $f(q)$ in modo tale che la funzione di Hamilton trasformata sia quella di un oscillatore armonico.