Soluzione Esonero 6-6-00

1) In coordinate cilindriche ogni particella ha un'hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_z^2) + \frac{m\omega^2}{2}r^2$$

da cui otteniamo una funzione di partizione canonica:

$$Z^c = \frac{1}{N!}\Big[\int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz \int_{-\infty}^{+\infty} dp_r \int_{-\infty}^{+\infty} dp_\phi \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z e^{-\beta(\frac{1}{2m}(p_r^2+\frac{p_\phi^2}{r^2}+p_z^2)+\frac{m\omega^2}{2}r^2)}\Big]^N =$$

$$= \frac{1}{N!}\Big[(\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}}\frac{2\pi h}{\beta m\omega^2}(1 - e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}R^2})\Big]^N$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z^c = \frac{5}{2}N\frac{1}{\beta} - N\frac{m\omega^2}{2}R^2\frac{e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}R^2}}{1-e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}R^2}}$$

La densitá del gas in funzione di r é data dall'espressione:

$$\rho(r) = \frac{n(r)dr}{2\pi h r dr} = \frac{n(r)}{2\pi h r}$$

con $n(r)dr$ il numero medio di particelle nel volume infinitesimo cilindrico tra r e $r+dr$. Abbiamo quindi:

$$n(r)dr = \frac{1}{Z^c}\frac{1}{N!}\int_0^R dr_1 \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_0^h dz_1 \ldots.$$

$$\ldots.\int_{-\infty}^{+\infty} dp_{r,1}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\phi,1}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_{z,1}\ldots.\sum_{k=1}^N \chi^k_{(r,r+dr)}e^{-\beta(\frac{1}{2m}\sum_{j=1}^N(p_{r,j}^2+\frac{p_{\phi,j}^2}{r^2}+p_{z,j}^2)+\frac{m\omega^2}{2}r_j^2)} =$$

$$= Nr\beta m\omega^2\frac{e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}r^2}}{1-e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}R^2}}dr$$

da cui otteniamo:

$$\rho(r) = \frac{N\beta m\omega^2}{2\pi h}\frac{e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}r^2}}{1-e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}R^2}}$$

2) La funzione di partizione gran-canonica é data da:

$$Z^g = \exp\{e^{\beta\mu}(\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}}\frac{2\pi h}{\beta m\omega^2}(1-e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}R^2})\}$$

Il numero medi di particelle é dato da:

$$< n >= \log Z^g = e^{\beta\mu}(\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}}\frac{2\pi h}{\beta m\omega^2}(1-e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}R^2})$$

e dall'equazione di stato del gas perfetto otteniamo:

$$P^g = \frac{< n > kT}{V} = kTe^{\beta\mu}(\frac{2\pi m}{\beta})^{\frac{3}{2}}\frac{2}{\beta m\omega^2 R^2}(1-e^{-\beta\frac{m\omega^2}{2}R^2})$$