1 Soluzioni

1.1 Esercizio 1

Affinchè la distribuzione di probabilità sia correttamente definita deve essere $a > 0$, altrimenti la funzione $p(x)$ non è integrabile sulla retta. Inoltre deve essere soddisfatta la condizione di normalizzazione $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ dx = 1$ e questo fissa il valore della costante C,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\ dx = \frac{2}{aC},$$

per cui $C = \frac{2}{a}$.

Ora è possibile calcolare l'entropia

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-\infty}^{\infty} dx\ p(x)\ln[p(x)] = -2\frac{a}{2}\int_0^{\infty} dx\ \mathrm{e}^{-ax}\ln\left(\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-ax}\right) \\ &= -a\int_0^{\infty} dx\ \mathrm{e}^{-ax}\left[\ln\left(\frac{a}{2}\right) - ax\right] \\ &= 1 - \ln\left(\frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

1.2 Esercizio 2

L'hamiltoniana di singola particella è

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) + mgz$$

mentre la funzione di partizione è data da $Z_c = \frac{Z_1^N}{N!}$ dove

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int d^3p d^3r\ \mathrm{e}^{-\beta H} \\ &= \int d^3p \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)} \int d^3r \mathrm{e}^{-\frac{\beta m\omega^2}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{e}^{-\beta mgz} \\ &= \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^L dz\ \mathrm{e}^{-\beta mgz}\int_0^R drr\int_0^{2\pi} d\varphi\ \mathrm{e}^{-\frac{\beta m\omega^2}{2}r^2} \\ &= \left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\beta mg}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta mgL}\right)\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\beta m\omega^2 R^2}{2}}\right). \end{aligned}$$

L'energia libera si calcola dalla definizione

$$F = -kT\ln(Z_c) = -NkT - NkT\ln\left(\frac{Z_1}{N}\right) = -NkT\ln\left(\frac{eZ_1}{N}\right)$$

così come l'energia media

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_c = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(Z_1)$$

$$= \quad N\left(\frac{7}{2}kT - \frac{mgL}{\mathrm{e}^{\beta mgL}-1} - \frac{m\omega^2 R^2}{2}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\beta m\omega^2 R^2}{2}}-1}\right)$$

e il calore specifico

$$C_v = \frac{\partial E}{\partial T} = Nk\left[\frac{7}{2} - \left(\frac{mgL}{kT}\right)^2 \frac{\mathrm{e}^{\beta mgL}}{\left(\mathrm{e}^{\beta mgL}-1\right)^2} - \left(\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}\right)^2 \frac{\mathrm{e}^{\frac{\beta m\omega^2 R^2}{2}}}{\left(\mathrm{e}^{\frac{\beta m\omega^2 R^2}{2}}-1\right)^2}\right].$$

Infine si calcola l'entropia che è data da

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{E-F}{T}$$

in cui occorre sostituire le espressioni trovate per F e E.