

Compito d'esame di Meccanica Razionale: 14-6-2000

E. Scoppola, R. Raimondi

Soluzione

1) È conveniente introdurre le variabili relativa e del centro di massa definite da

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Dalle equazioni del moto

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (2)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (3)$$

otteniamo immediatamente che l'accelerazione del centro di massa è nulla e dunque la sua velocità è una costante del moto. Il moto del centro di massa è libero e possiamo dunque scegliere l'origine del nostro sistema di riferimento nel centro di massa. Il moto relativo nella variabile $\mathbf{r}$ è quello di un punto materiale di massa ridotta $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ in un potenziale centrale. Poiché il campo di forza è centrale abbiamo anche la conservazione del momento angolare, il moto relativo può essere dunque studiato in un piano. In coordinate polari nel piano esso è descritto dalla lagrangiana:

$$\mathcal{L}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{1}{2} k r^2 \quad (4)$$

Il campo di forza centrale è conservativo e dunque si conserva anche l'energia totale

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} k r^2 \quad (5)$$

2) La variabile ϕ è ciclica, questo implica che è conservato il suo momento $p_\phi = \mu r^2 \dot{\phi}$ che coincide col momento angolare e dunque possiamo considerare la lagrangiana ridotta:

$$\mathcal{L}_R(r, \dot{r}) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - \frac{1}{2} k r^2 - \frac{p_\phi^2}{2 \mu r^2} \quad (6)$$

Il moto relativo si riduce dunque ad un problema unidimensionale con $r > 0$ e potenziale efficace

$$V_{eff} = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\phi^2}{\mu r^2}. \quad (7)$$

3) Dallo studio della funzione $V_{eff}(r)$ otteniamo che essa é sempre positiva con un unico punto critico

$$r_0 = \left(\frac{p_\phi^2}{\mu k}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (8)$$

che é un minimo con $V_{eff}(r_0) = p_\phi \left(\frac{k}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \equiv E_0$

Il punto r_0 é dunque un punto di equilibrio stabile per il problema unidimensionale e corrisponde ad un'orbita circolare percorsa con velocità angolare costante per il problema in due dimensioni.

Per dati iniziali corrispondenti ad $E > E_0$ il problema unidimensionale ha moto periodico tra due punti r_- e r_+ che sono due punti di inversione dati da:

$$r_+^2 = \frac{E + \sqrt{E^2 - kp_\phi^2/\mu}}{k}, \quad r_-^2 = \frac{E - \sqrt{E^2 - kp_\phi^2/\mu}}{k}. \quad (9)$$

Il periodo corrispondente a questo moto é dato da

$$T(E) = 2 \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff}(r))}} \quad (10)$$

Il moto del problema bidimensionale si svolge in questo caso nella corona circolare tra r_- ed r_+ su un'orbita di equazione

$$\frac{dr}{d\phi} = \pm \frac{mr^2}{p_\phi} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))} \quad (11)$$

Dal teorema di Bertrand sappiamo che queste orbite sono chiuse.

4) L'hamiltoniana per il moto relativo diventa

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_r^2}{\mu} + \frac{1}{2}\frac{p_\phi^2}{\mu r^2} + \frac{1}{2}kr^2. \quad (12)$$

e le equazioni di Hamilton associate sono

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\mu} \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{\mu r^2} \quad (13)$$

$$\dot{p}_r = -kr + \frac{p_\phi}{\mu r^3} \quad \dot{p}_\phi = 0 \quad (14)$$

5) Cerchiamo la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi nella forma

$$S(r, \phi, t) = S_r(r) - Et + \phi p_\phi \quad (15)$$

dove

$$S_r(r) = \sqrt{2\mu} \int dr \sqrt{E - \frac{p_\phi^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{2}kr^2}. \quad (16)$$

Scegliamo E e p_ϕ come nuovi impulsi e siano α e β le variabili coniugate anch'esse costanti. Si ha

$$\alpha = -t + \sqrt{2\mu} \int dr \frac{1}{2} \left(E - \frac{p_\phi^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{2}kr^2 \right)^{-1/2} \quad (17)$$

$$\beta = \phi - \frac{\sqrt{2\mu}p_\phi}{\mu} \int \frac{dr}{r^2} \frac{1}{2} \left(E - \frac{p_\phi^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{2}kr^2 \right)^{-1/2} \quad (18)$$

La prima equazione è l'equazione oraria di r , mentre la seconda fornisce l'equazione della traiettoria nel piano. Risolvendo gli integrali si ottiene

$$r^2 = \frac{r_+^2 + r_-^2}{2} + \frac{r_+^2 - r_-^2}{2} \sin \left(2\sqrt{k/\mu}(t + \alpha) \right) \quad (19)$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{r_+^2 + r_-^2}{2r_+^2 r_-^2} + \frac{r_+^2 - r_-^2}{2r_+^2 r_-^2} \sin \left(2(\phi + \beta) \right). \quad (20)$$

6) La variabile azione associata al moto della variabile ϕ è il momento angolare stesso, cioè $J_\phi = p_\phi$. La variabile azione associata al moto in r è data da

$$\frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} dr \sqrt{2\mu} \sqrt{E - \frac{J_\phi^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{2}kr^2} = \frac{1}{2} \left(E \sqrt{\frac{k}{\mu}} - J_\phi \right) \quad (21)$$

da cui

$$H = \sqrt{\frac{k}{\mu}} (2J_r + J_\phi). \quad (22)$$

Per calcolare l'integrale nella (21) che esprime $J_r = f(E, J_\phi)$ usiamo il seguente accorgimento (che semplifica notevolmente il calcolo). Calcoliamo

$$\frac{\partial J_r}{\partial E} = \frac{1}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} dr \frac{1}{2} \left(E - \frac{J_\phi^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{2}kr^2 \right)^{-1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{k}} \quad (23)$$

e anche

$$\frac{\partial J_r}{\partial J_\phi} = \frac{1}{\pi} \int_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{r^2} \left(-\frac{J_\phi}{\mu} \right) \frac{1}{2} \left(E - \frac{J_\phi^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{2}kr^2 \right)^{-1/2} = -\frac{1}{2} \quad (24)$$

Abbiamo dunque

$$\omega_r = \frac{\partial H}{\partial J_r} = 2\sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (25)$$

$$\omega_\phi = \frac{\partial H}{\partial J_\phi} = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (26)$$

quindi $\frac{\omega_r}{\omega_\phi} = 2$ e dunque il moto é periodico.

7) Calcoliamo la funzione di partizione canonica corrispondente a N copie indipendenti del sistema di hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{\mu} + \frac{1}{2} \frac{p_\phi^2}{\mu r^2} + \frac{1}{2} k r^2 \quad (27)$$

Abbiamo

$$Z^c = \frac{1}{N!} \left[\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{2R} dr \int_{-\infty}^{\infty} dp_r \int_{-\infty}^{\infty} dp_\phi e^{-\beta H} \right]^N \quad (28)$$

da cui otteniamo

$$Z^c = \frac{1}{N!} \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 \frac{\mu}{k} (1 - e^{-2\beta k R^2}) \right]^N \quad (29)$$

e dunque

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z^c = \frac{2N}{\beta} - N 2k R^2 \frac{e^{-2\beta k R^2}}{1 - e^{-2\beta k R^2}} \quad (30)$$

8) esprimendo Z^c in termini del volume otteniamo

$$Z^c = \frac{1}{N!} \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 \frac{\mu}{k} (1 - e^{-2\beta k \frac{V}{\pi}}) \right]^N \quad (31)$$

da cui otteniamo

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial V} \log Z^c = \frac{2Nk}{\pi} \frac{e^{-2\beta k \frac{V}{\pi}}}{1 - e^{-2\beta k \frac{V}{\pi}}} \quad (32)$$