Soluzione scritto del 25-6-01

1) Uso coordinate sferiche e pongo S nel polo sud ($\theta = \pi$).

$$V = \frac{1}{2}KR^2[\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2] = KR^2\cos\theta + cost$$

da cui abbiamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) - KR^2\cos\theta$$

che é la lagrangiana di un pendolo sferico.

2) Le quantitá conservate sono:

$$E = \frac{1}{2}mR^2(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + KR^2\cos\theta$$

che e' l'energia, infatti la lagrangiana non dipende dal tempo e per vincoli olonomi bilateri e fissi l'energia generalizzata coincide con l'energia.

Un'altra quantitá conservata é:

$$p_\phi = mR^2\sin^2\theta\dot\phi$$

che é il momento angolare, infatti ϕ é una coordinata ciclica.

3) Dal metodo di Ruth per la coordinata ciclica ϕ otteniamo:

$$\mathcal{L}_R(\theta,\dot\theta) = \mathcal{L}(\theta,\dot\theta,\dot\phi(p_\phi,\theta)) - p_\phi\dot\phi(p_\phi,\theta)$$

con $\dot\phi(p_\phi,\theta) = \frac{p_\phi}{mR^2\sin^2\theta}$, da cui

$$\mathcal{L}_R(\theta,\dot\theta) = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 - KR^2\cos\theta - \frac{p_\phi^2}{2mR^2\sin^2\theta} = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2 - V_{eff}$$

con

$$V_{eff} = KR^2\cos\theta + \frac{p_\phi^2}{2mR^2\sin^2\theta}$$

4) L'analisi del moto é quella del pendolo sferico.

Per $p_\phi = 0$ il moto si riduce a quello del pendolo semplice. Per $p_\phi \neq 0$ dobbiamo studiare il potenziale efficace. $V'_{eff} = 0$ in un unico punto $\bar\theta$ che soddisfa l'equazione:

$$-KR^2\sin\bar\theta - \frac{p_\phi\cos\bar\theta}{mR^2\sin^3\bar\theta} = 0$$

infatti per $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ abbiamo $V'_{eff}(\theta) < 0$ e per $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ abbiamo $V''_{eff}(\theta) > 0$, e dunque c'e' un unico punto critico $\bar\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ che é un minimo. Per $\theta \to 0$ e $\theta \to \pi$ abbiamo $V_{eff} \to \infty$. Dunque per $E = V_{eff}(\bar\theta)$ il moto avviene a $\theta = cost = \bar\theta$ e $\phi(t) - \phi(0) = \frac{p_\phi}{mR^2\sin^2\bar\theta}t$. Per $E > V_{eff}(\bar\theta)$ il moto avviene tra θ_- e θ_+ soluzioni di $E = V_{eff}(\theta)$ e l'equazione dell'orbita é:

$$d\phi = \frac{p_\phi}{mR^2\sin^2\theta}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(E - V_{eff}(\theta))}}d\theta$$

Il moto é periodico se, definito

$$\Phi = \int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{p_\phi}{mR^2 \sin^2\theta} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(E - V_{eff}(\theta))}} d\theta$$

abbiamo che $\frac{\Phi}{2\pi} \in \mathbf{Q}$.

5)

$$H = \frac{1}{2mR^2}(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}) + KR^2\cos\theta$$

e le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p}_\theta = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{mR^2 \sin^2\theta} + KR^2 \sin\theta$$

$$\dot{p}_\phi = 0$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2 \sin^2\theta}$$

6) L'equazione di Hamilton-Jacobi indipendente dal tempo é:

$$\frac{1}{2mR^2}[(\frac{\partial W}{\partial\theta})^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(\frac{\partial W}{\partial\phi})^2] + KR^2\cos\theta = E$$

che é separabile, da cui, ponendo $W = W_\theta + W_\phi$, si ottengono le equazioni:

$$\frac{\partial W_\phi}{\partial\phi} = cost = p_\phi$$

$$\frac{1}{2mR^2}[(\frac{\partial W_\theta}{\partial\theta})^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}] + KR^2\cos\theta = E$$

da cui:

$$W_\phi(p_\phi, \phi) = p_\phi\phi$$

$$W_\theta(E, p_\phi, \theta) = \pm\int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{2mR^2(E - KR^2\cos\theta' - \frac{p_\phi^2}{2mR^2\sin^2\theta'})} d\theta'$$

Dunque ponendo $\alpha_1 = E$ e $\alpha_2 = p_\phi$ come nuovi impulsi otteniamo per le nuove coordinate:

$$\beta_1 = \frac{\partial W}{\partial\alpha_1}$$

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial\alpha_2}$$

con le equazioni del moto:

$$\dot{\beta}_1 = 1 \qquad \dot{\beta}_2 = 0$$

e dunque otteniamo la soluzione:

$$\beta_1(t) = \beta_1(0) + t = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{mR^2}{\sqrt{2mR^2(E - KR^2\cos\theta' - \frac{p_\phi^2}{2mR^2\sin^2\theta'})}} d\theta'$$

$$\beta_2(t) = \beta_1(0) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \phi - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\frac{p_\phi}{\sin^2\theta'}}{\sqrt{2mR^2(E - KR^2\cos\theta' - \frac{p_\phi^2}{2mR^2\sin^2\theta'})}} d\theta'$$

7)
la funzione di partizione é data da:

$$Z^c = \frac{1}{N!}\Big(\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} dp_\phi \int_{-\infty}^{+\infty} dp_\theta e^{-\beta[\frac{1}{2mR^2}(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}) + mgR\cos\theta]}\Big)^N =$$

$$= \frac{1}{N!}\big(2\pi(\frac{2\pi mR^2}{\beta})^{\frac{1}{2}}(\frac{2\pi mR^2}{\beta})^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta e^{-\beta mgR\cos\theta}\big)^N =$$

$$= \frac{1}{N!}\big(\frac{4\pi^2 R}{\beta^2 g}(e^{\beta mgR} - e^{-\beta mgR})\big)^N = \frac{1}{N!}\big(\frac{8\pi^2 R}{\beta^2 g}\sinh(\beta mgR)\big)^N$$

da cui

$$U = -\frac{\partial \log Z^c}{\partial \beta} = -N(-2kT + mgR\cosh(\beta mgR))$$