Compito d'esonero di Meccanica Razionale: 27-4-2000

E. Scoppola, R. Raimondi

Soluzione

1) La funzione di Lagrange, in termini dei raggi vettori dei due punti materiali $\mathbf{r}_1 = R_1(\cos(\phi_1), \sin(\phi_1))$, $\mathbf{r}_2 = R_2(\cos(\phi_2), \sin(\phi_2))$, si scrive

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \dot{\mathbf{r}}_2^2 \right) - \frac{1}{2} K \left(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \right)^2 . \tag{1}$$

In termini delle coordinate angolari ϕ_1 e ϕ_2 possiamo scrivere

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(R_1^2 \dot{\phi}_1^2 + R_2^2 \dot{\phi}_2^2 \right) - \frac{1}{2} K \left(R_1^2 + R_2^2 - 2 R_1 R_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right) . \tag{2}$$

La funzione di Hamilton in coordinate polari risulta allora essere

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_1^2}{R_1^2} + \frac{p_2^2}{R_2} \right) + \frac{1}{2} K \left(R_1^2 + R_2^2 - 2 R_1 R_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \right) \tag{3}$$

dove $p_1 = m R_1^2 \dot{\phi}_1$, e $p_2 = m R_2^2 \dot{\phi}_2$ sono gli impulsi coniugati a ϕ_1 e ϕ_2 rispettivamente. Notiamo inoltre che p_1 e p_2 sono anche i momenti angolari dei due punti materiali.

2) Poichè l'energia potenziale dipende solo dalla differenza delle coordinate dei due punti materiali, il momento angolare totale, $l = p_1 + p_2$, è conservato. Questo può essere derivato, ad esempio, usando le parentesi di Poisson.

$$\{H, p_1 + p_2\} = \{H, p_1\} + \{H, p_2\} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial H}{\partial \phi_i} \frac{\partial p_1}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_1}{\partial \phi_i} \right) = \frac{\partial H}{\partial \phi_1} + \frac{\partial H}{\partial \phi_2} = 0. \tag{4}$$

3) Basta osservare che la trasformazione

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 - \phi_2 \\ \psi &= \frac{R_1}{R_2} \phi_1 + \frac{R_2}{R_1} \phi_2 \\ p_\phi &= \frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} p_1 - \frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} p_2 \\ p_\psi &= \frac{R_1 R_2}{R_1^2 + R_2^2} (p_1 + p_2) \end{aligned} \tag{5}$$

origina da una trasformazione di punto ed è quindi canonica. Mediante questa trasformazione la funzione di Hamilton diventa

$$H = \frac{1}{2m} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 R_2^2} \left(p_\phi^2 + p_\psi^2 \right) + \frac{1}{2} K \left(R_1^2 + R_2^2 - 2 R_1 R_2 \cos(\phi) \right) . \tag{6}$$

4) ψ è una variabile ciclica e il suo impulso associato può essere espresso in termini del momento angolare totale, $p_\psi = ((R_1 R_2)/(R_1^2 + R_2^2)) l$. Dunque p_ψ è costante e siamo ricondotti ad un problema unidimensionale. L'equazione di Hamilton-Jacobi è a variabili separabili. L'integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi è dato da

$$S(\phi, \psi) = -Et + p_\psi \psi + S_\phi(\phi, E, p_\psi) \tag{7}$$

dove $S_\phi(\phi, E, p_\psi)$ soddisfa l'equazione

$$\left(\frac{dS_\phi}{d\phi} \right)^2 = 2m \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \left(E - \frac{1}{2} K \left(R_1^2 + R_2^2 - 2 R_1 R_2 \cos(\phi) \right) \right) - p_\psi^2 . \tag{8}$$

Nello spirito del metodo di Hamilton-Jacobi introduciamo due coordinate costanti Q_E e Q_ψ coniugate ai nuovi impulsi E e p_ψ mediante le formule delle funzioni generatrici di seconda specie

$$
\begin{aligned}
Q_E &= -t + \int \frac{\mathrm{d}\phi}{2} \frac{2m\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}}{\sqrt{2m\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\left(E-\frac{1}{2}K\left(R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos(\phi)\right)\right)-p_\psi^2}} \\
Q_\psi &= \psi + \int \frac{\mathrm{d}\phi}{2} \frac{2p_\psi}{\sqrt{2m\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\left(E-\frac{1}{2}K\left(R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos(\phi)\right)\right)-p_\psi^2}}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Combinando le due equazioni si ha

$$
\begin{aligned}
Q_E &= -t + \sqrt{2m\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}} \int \frac{\mathrm{d}\phi}{2} \frac{1}{\sqrt{\left(E-\frac{1}{2}K\left(R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos(\phi)\right)\right)-\frac{R_1^2+R_2^2}{2mR_1^2R_2^2}p_\psi^2}} \\
\psi &= Q_\psi - p_\psi \frac{1}{2m}\frac{R_1^2+R_2^2}{R_1^2R_2^2}(t+Q_E).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

La seconda delle (10) mostra che ψ varia linearmente nel tempo con velocità costante data $\frac{l}{2mR_1R_2}$, e la combinazione $Q_\psi - \frac{l}{2mR_1R_2}Q_E$ rappresenta una fase iniziale. La prima delle (10) dà in forma implicita la dipendenza di ϕ dal tempo. Il termine di potenziale associato con la variabile ϕ è del tipo di quello incontrato nel problema del pendolo semplice. L'integrale su ϕ può essere ricondotto, mediante $1-\cos(\phi) = 2\sin^2(\phi/2)$ ad un integrale del tipo

$$
F(v,\phi) = \int_0^\phi \mathrm{d}s \frac{1}{\sqrt{1-v^2\sin^2(s)}}
\tag{11}
$$

detto Integrale Ellittico incompleto di prima specie. Nel nostro caso abbiamo

$$
Q_E + t = AF(B,\phi)
\tag{12}
$$

dove

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{2m\frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}}}{\sqrt{\left(E-\frac{1}{2}K\left(R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\right)\right)-\frac{R_1^2+R_2^2}{2mR_1^2R_2^2}p_\psi^2}} \\
B^2 &= \frac{\frac{R_1^2+R_2^2}{mR_1^2R_2^2}p_\psi^2}{\left(E-\frac{1}{2}K\left(R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\right)\right)-\frac{R_1^2+R_2^2}{2mR_1^2R_2^2}p_\psi^2}
\end{aligned}
\tag{13}
$$