Compito d'esame di Meccanica Razionale: 9-5-2001

E. Scoppola, R. Raimondi

Soluzione Esercizio

1) Scegliamo come piano verticale il piano xz. Le due guide hanno equazione $z = \pm ax$, dove $a = \tan\theta$. Considerando come variabili lagrangiane x_1 e x_2, abbiamo $z_1 = ax_1$ e $z_2 = -ax_2$. La Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)(1+a^2) + mga(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}k[(x_1-x_2)^2 + a^2(x_1+x_2)^2]. \quad (1)$$

Introduciamo le coordinate del centro di massa e del moto relativo con

$$X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad (2)$$

$$x = x_1 - x_2 \quad (3)$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{4}(1+a^2)\dot{x}^2 + m(1+a^2)\dot{X}^2 - mgax - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}4ka^2X^2 & (4) \\ &= \frac{m_x}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_X}{2}\dot{X}^2 - \nu x - \frac{m_x\omega_x^2}{2}x^2 - \frac{m_X\omega_X^2}{2}X^2, & (5) \end{aligned}$$

dove, per comodità abbiamo ridefinito opportunamente le varie costanti, $m_x = m(1+a^2)/2$, $m_X = 2m(1+a^2)$, $\omega_x^2 = (2k/m)(1/(1+a^2))$, $\omega_X^2 = (2a^2k/m)(1/(1+a^2))$ e $\nu = mga$. La Lagrangiana ottenuta corrisponde dunque a due oscillatori armonici indipendenti. Indicando con p e P gli impulsi corrispondenti a x e X, la Hamiltoniana risulta quindi

$$H = \frac{p^2}{2m_x} + \frac{P^2}{2m_X} + \nu x + \frac{m_x\omega_x^2 x^2}{2} + \frac{m_X\omega_X^2 X^2}{2}. \quad (6)$$

2) Il problema è separabile per cui cerchiamo la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi nella forma

$$S(x, X, t) = S_x(x) + S_X(X) - Et \quad (7)$$

ottenendo le due equazioni

$$\frac{1}{2m_X}\left(\frac{\partial S_X}{\partial X}\right)^2 = \alpha_1 - \frac{m_X\omega_X^2 X^2}{2} \quad (8)$$

$$\frac{1}{2m_x}\left(\frac{\partial S_x}{\partial x}\right)^2 = \alpha_2 - \frac{m_x\omega_x^2 x^2}{2} - \nu x \quad (9)$$

dove $\alpha_1 + \alpha_2 = E$. Scegliendo α_1 e α_2 come nuovi impulsi determiniamo le nuove coordinate da

$$\beta_1 = \frac{\partial S_X}{\partial \alpha_1} - t \tag{10}$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S_x}{\partial \alpha_2} - t. \tag{11}$$

Osservando che

$$\frac{m_x \omega_x^2 x^2}{2} + \nu x = \frac{m_x \omega_x^2}{2} \left(x + \frac{\nu}{m_x \omega_x^2} \right)^2 - \frac{\nu^2}{2 m_x \omega_x^2}$$

si ottiene

$$\beta_1 + t = \frac{1}{\omega_X} \arcsin \left(\sqrt{\frac{m_X \omega_X^2}{2\alpha_1}} X \right) \tag{12}$$

$$\beta_2 + t = \frac{1}{\omega_x} \arcsin \left(\sqrt{\frac{m_x \omega_x^2}{2(\alpha_2 + \nu^2/(2 m_x \omega_x^2))}} \left(x + \frac{\nu}{m_x \omega_x^2} \right) \right) - \frac{\nu}{m_x \omega_x^2} \tag{13}$$

L'equazione oraria per x e X è quindi

$$X = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m_X \omega_X^2}} \sin\left(\omega_X t + \beta_1 \omega_X\right) \tag{14}$$

$$x = \sqrt{\frac{2(\alpha_2 + \nu^2/(2 m_x \omega_x^2))}{m_x \omega_x^2}} \sin\left(\omega_x t + \beta_2 \omega_x\right) - \frac{\nu}{m_x \omega_x^2}. \tag{15}$$

2) Le variabili d'azione sono

$$J_X = \frac{1}{2\pi} \oint P \mathrm{d}X = \frac{\alpha_1}{\omega_X} \tag{16}$$

$$J_x = \frac{1}{2\pi} \oint p \mathrm{d}x = \frac{1}{\omega_x} \left(\alpha_2 + \frac{\nu^2}{2 m_x \omega_x^2} \right) \tag{17}$$

e l'energia diventa

$$E = \omega_X J_X + \omega_x J_x - \frac{\nu^2}{2 m_x \omega_x^2}. \tag{18}$$