

## Scritto di Meccanica Analitica 16-9-2014

E. Scoppola

### Esercizio 1

Un sistema meccanico pesante, appartenente ad un piano verticale  $\pi$ , è costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m_1$  e da un'asta rigida sottile omogenea  $AB$  di massa  $m_2$  e lunghezza  $L$ . Il punto  $P$  è vincolato ad una retta orizzontale  $x$  del piano  $\pi$  ed il centro  $C$  dell'asta è vincolato ad una parabola di equazione  $y = -ax^2$  con  $a > 0$  (vedi figura). I due punti  $P$  e  $C$  sono collegati da una molla ideale di costante di richiamo  $K > 0$  e lunghezza a riposo nulla. Utilizzare come variabili lagrangiane le coordinate  $x_1$  e  $x_2$  dei punti  $P$  e  $C$  rispettivamente e l'angolo  $\theta$  che  $AB$  forma con la verticale.

- 1) Scrivere la lagrangiana e l'equazione del moto.
- 2) Determinare le variabili cicliche e gli integrali primi e calcolare la lagrangiana ridotta.
- 3) Per la lagrangiana ridotta determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità al variare dei parametri.
- 4) Calcolare la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno ad un punto di equilibrio stabile del sistema.

Se il punto  $P$  è fissato nell'origine  $O$

- 5) determinare i dati iniziali cui fa seguito un moto periodico.

**Scritto di Meccanica Analitica 16-9-2014**  
E. Scoppola

**Esercizio 2**

Si consideri la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3} \quad \text{con } q > 0. \quad (1)$$

- 1) Scrivere l'hamiltoniana e le equazioni di Hamilton.
- 2) Determinare la trasformazione canonica tale che  $Q(q) = \frac{q^3}{3}$ .
- 3) Usare la trasformazione trovata al punto precedente per integrare le equazioni del moto con dati iniziali  $q(0) = 1$ ,  $p(0) = 0$ .
- 4) Integrare le equazioni del moto con gli stessi dati iniziali utilizzando il metodo di Hamilton Jacobi.