

Scritto di Meccanica Analitica del 24-6-2014

E. Scoppola

Esercizio 1

Un sistema meccanico appartenente ad un piano verticale Π è formato da un disco sottile rigido omogeneo di raggio r e massa m e da un'asta sottile rigida omogenea AB di lunghezza l e massa M . L'asta ha gli estremi vincolati senza attrito ad una circonferenza fissa nel piano Π , di centro O e raggio $R = \frac{l}{\sqrt{2}}$ ed il disco rotola senza strisciare su di una retta verticale di equazione $x = -r$ avendo assunto O l'origine del sistema di riferimento (vedi disegno). Il centro c del disco è collegato al centro C dell'asta da una molla ideale di costante di richiamo $2K > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si considerino come variabili lagrangiane la coordinata y di c e l'angolo θ che OC forma con l'asse orizzontale x .

- 1) Scrivere la lagrangiana e le equazioni del moto.
- 2) Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
- 3) Scrivere la lagrangiana delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile e determinarne le pulsazioni.
- 4) Se il piano Π viene posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costante ω , determinare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π e i nuovi punti di equilibrio.

Scritto di Meccanica Analitica del 24-6-2014

E. Scoppola

Esercizio 2

Per $q > 0$ si consideri la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{q^2} - \log q \quad (1)$$

- 1) Determinare l'hamiltoniana.
- 2) Determinare le equazioni di Hamilton.
- 3) Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione $F(q, P) = P \log q$.
- 4) Usare la trasformazione canonica trovata al punto 3) per integrare le equazioni del moto con dati iniziali $q(0) = 1, p(0) = 0$
- 5) Integrare le equazioni, con gli stessi dati iniziali, usando il metodo di Hamilton-Jacobi.