

Scritto di Meccanica Analitica del 3-2-15

E. Scoppola

Esercizio 1

Un sistema meccanico, posto in un piano verticale Π , è costituito da un disco omogeneo di massa M e raggio R e da un' asta, rigida, sottile, omogenea, AB di lunghezza $l = 2R$ e massa m . Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare su un asse verticale y del piano Π , l'asta ha l'estremo A incernierato senza attrito nel centro C del disco e l'estremo B è connesso ad un asse orizzontale x da una molla ideale di costante di richiamo $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla (in modo che la molla lavora sempre in posizione verticale). Si considerino come variabili lagrangiane l'angolo θ che AB forma con l'asse x (vedi figura) e la coordinata y del punto C .

- 1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le equazioni del moto.
- 2) Trovare i punti di equilibrio, discutendone la stabilità, al variare dei parametri.
- 3) Studiare l'approssimazione delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile del sistema e calcolarne il periodo.
- 4) (*facoltativo*) Se il piano Π è posto in rotazione attorno all'asse y con velocità angolare costante ω , calcolare la nuova lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione.

Scritto di Meccanica Analitica del 3-2-15

E. Scoppola

Esercizio 2

Si considerino le equazioni differenziali:

$$\dot{p} = -p^2(q+1) - \frac{1}{q+1}$$

$$\dot{q} = p(q+1)^2$$

con dati iniziali $p(0) = 0$, $q(0) = 1$.

- i) Verificare che il sistema è hamiltoniano e ricavarne la Hamiltoniana e la lagrangiana.
- ii) Ricavare la trasformazione canonica tale che $Q = \ln(q+1)$.
- iii) Usare la trasformazione canonica precedente per integrare le equazioni differenziali.
- iv) Si trovi la soluzione con il metodo di Hamilton-Jacobi.