Scritto di Meccanica Analitica 14 - 4 - 2014

E. Scoppola

Soluzione

1) Le coordinate del centro C del disco sono

$$x_C = l\cos\theta, \qquad y_C = -R$$

e quelle del baricentro dell'asta

$$x_G = \frac{l}{2}\cos\theta, \qquad y_G = -R + \frac{l}{2}\sin\theta$$

Dal teorema di Koenig otteniamo per l'energia cinetica dell'asta

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m(\frac{l}{2})^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\theta^2 \tag{1}$$

e per quella del disco

$$T_D = \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}(\frac{l\dot\theta}{R}\sin\theta)^2 = \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta^2\frac{3}{2}\sin^2\theta \tag{2}$$

dove abbiamo usato la relazione di rotolamento $\dot\phi = -\frac{l}{R}\dot\theta\sin\theta$.

Il potenziale gravitazionale è $V_g = mg\frac{l}{2}\sin\theta$ e quello elastico è $V_{el} = \frac{1}{2}Kl^2\cos^2\theta$. La lagrangiana dunque è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot\theta^2\frac{3}{2}\sin^2\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}Kl^2\cos^2\theta \tag{3}$$

L' equazione del moto è:

$$m\frac{l^2}{3}\ddot\theta + \frac{3}{2}Ml^2\ddot\theta\sin^2\theta + 3Ml^2\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta =$$
$$= \frac{3}{2}Ml^2\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta - mg\frac{l}{2}\cos\theta + Kl^2\sin\theta\cos\theta \tag{4}$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$V'(\theta) = l\cos\theta[\frac{mg}{2} - Kl\sin\theta] = 0 \tag{5}$$

cioè i punti $\theta_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\theta_2 = \frac{3}{2}\pi$, e se $\lambda := \frac{mg}{2Kl} < 1$ anche $\theta_{3,4} = \arcsin\lambda$.

Per studiare la stabilità valuto la derivata seconda nei diversi punti.

$$V"(\theta) = -l\sin\theta[\frac{mg}{2} - Kl\sin\theta] - Kl^2\cos^2\theta \qquad (6)$$

da cui : $V"(\theta_1) = -[\frac{mgl}{2} - Kl^2]$ e cioè il punto θ_1 è stabile per $\lambda < 1$ e instabile per $\lambda > 1$; $V"(\theta_2) = [\frac{mgl}{2} + Kl^2] > 0$ e cioè il punto θ_2 è stabile sempre; $V"(\theta_{3,4}) = -Kl^2\cos^2\theta < 0$ e dunque $\theta_{3,4}$ sono instabili quando esistono; per continuità per $\lambda = 1$ il punto θ_1 è instabile.

3) Intorno al punto di equilibrio stabile θ_2 la lagrangiana delle piccole oscillazioni è:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\frac{3}{2} - \frac{1}{2}[\frac{mgl}{2} + Kl^2](\theta - \theta_2)^2 \qquad (7)$$

ed il periodo è dunque

$$T_{po} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m}{3} + M\frac{3}{2}}{[\frac{mg}{2l} + K]}}$$

.

4) L'energia potenziale nel caso $mg > 2Kl$ ha solo due punti critici: θ_1 che è un massimo e θ_2 che è un minimo che corrispondono ai valori del potenziale $\pm mg\frac{l}{2}$. I moti sono dunque periodici se si escludono i dati iniziali $\theta(0)$ e $\dot{\theta}(0)$ tali che l' energia totale

$$E = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}(0)^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}(0)^2\frac{3}{2}\sin^2\theta(0) + mg\frac{l}{2}\sin\theta(0) + \frac{1}{2}Kl^2\cos^2\theta(0)$$

è uguale a $\pm mg\frac{l}{2}$.

5) Se il piano Π è posto in rotazione, la nuova lagrangiana, nel sistema di riferimento K solidale col piano, è

$$\mathcal{L}_K = \mathcal{L} - V_{centr}$$

con

$$V_{centr} = V_{centr,AB} + V_{centr,disco}$$

dove, per simmetria, per il disco vale

$$V_{centr,disco} = -\frac{1}{2}\omega^2 Ml^2\cos^2\theta$$

mentre per l'asta

$$V_{centr,AB} = -\frac{1}{2}\omega^2\rho\int_0^l ds(s\cos\theta)^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 m\cos^2\theta\frac{l^2}{3}.$$