Scritto di Meccanica Analitica del 15-7-2014

E. Scoppola

Soluzione Esercizio 1

1) Abbiamo

$$x_G = 0, \qquad y_G = l\sin\theta$$
$$x_P = s\cos\theta, \qquad y_P = (l-s)\sin\theta$$

da cui

$$T_P = \frac{1}{2}m[\dot{s}^2 + (s^2 + \cos^2\theta(l^2 - 2ls))\dot{\theta}^2 - 2l\dot{\theta}\dot{s}\sin\theta\cos\theta]$$

Dal teorema di Koenig abbiamo per l'energia cinetica dell'asta:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}M(l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale, a meno di termini costanti, è data da:

$$V = \frac{1}{2}Ks^2 + g\sin\theta[Ml + m(l-s)]$$

e dunque la lagrangiana è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot{s}^2 + (s^2 + \cos^2\theta(l^2 - 2ls))\dot{\theta}^2 - 2l\dot{\theta}\dot{s}\sin\theta\cos\theta]$$

$$\frac{1}{2}M(l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}Ks^2 - g\sin\theta[Ml + m(l-s)]$$

2) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale soluzioni di

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = g\cos\theta[Ml + m(l-s)] = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial s} = Ks - mg\sin\theta = 0$$

cioè i punti

$$(\frac{\pi}{2}, \frac{mg}{K}), \quad (\frac{3\pi}{2}, -\frac{mg}{K})$$

e se $\lambda := \frac{(M+m)lK}{m^2 g} < 1$ anche i punti

$$(\theta_{3,4}, \frac{(M+m)l}{m}) \qquad \text{con } \theta_{3,4} = \arcsin\lambda$$

Per discutere la stabilità valutiamo la matrice hessiana di V:

$$V''(\theta, s) = \begin{pmatrix} -g\sin\theta[Ml + m(l-s)] & -mg\cos\theta \\ -mg\cos\theta & K \end{pmatrix} \tag{1}$$

nei diversi punti critici. Per il punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{mg}{K})$ otteniamo

$$V''(\frac{\pi}{2}, \frac{mg}{K}) = \begin{pmatrix} -g[(M+m)l - \frac{m^2 g}{K}] & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{2}$$

e dunque il punto è stabile per $\lambda < 1$ e instabile per $\lambda > 1$. Per il punto $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{mg}{K})$ otteniamo

$$V''(\frac{3\pi}{2}, \frac{mg}{K}) = \begin{pmatrix} g[(M+m)l + \frac{m^2 g}{K}] & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \tag{3}$$

e dunque il punto è stabile sempre. Per i punti $(\arcsin\lambda, \frac{(M+m)l}{m})$ otteniamo

$$V''(\arcsin\lambda, \frac{(M+m)l}{m}) = \begin{pmatrix} 0 & -mg\cos\theta_{3,4} \\ -mg\cos\theta_{3,4} & K \end{pmatrix} \tag{4}$$

che ha determinante negativo e dunque i punti sono instabili, quando esistono. Per continuità otteniamo che per $\lambda = 1$ il punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{mg}{K})$ è instabile.

3) Intorno al punto $(\frac{3\pi}{2}, -\frac{mg}{K})$ la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (\theta, s)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}((\mathbf{q}-\mathbf{q}_0), V''(\frac{3\pi}{2}, -\frac{mg}{K})(\mathbf{q}-\mathbf{q}_0)) \tag{5}$$

con $\mathbf{q}_0 := (\frac{3\pi}{2}, -\frac{mg}{K})$ e

$$A = \begin{pmatrix} \frac{ML^2}{12} + (m+M)l^2 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \tag{6}$$

con pulsazioni proprie:

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m}, \qquad \omega_2^2 = \frac{g[(M+m)l + \frac{m^2 g}{K}]}{\frac{ML^2}{12} + (m+M)l^2}$$

4) Nel caso $s = 0$ otteniamo il potenziale

$$V(y) = (M+m)gl\sin\theta$$

Dunque possiamo concludere che tutti i moti sono periodici eccetto i dati iniziali $\theta(0) = \frac{3\pi}{2}$, $\dot\theta(0) = 0$ caso in cui non c'e' moto e quelli corrispondenti ad una energia totale

$$E = \frac{1}{2}(m+M)l^2\dot\theta(0)^2\cos^2\theta(0) + \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot\theta(0)^2 - (m+M)gl\sin\theta(0) = (M+m)gl.$$

Soluzione Esercizio 2

1) Il sistema è hamiltoniano con Hamiltoniana:

$$\frac{x^2y^2}{2} + \ln y$$

2) Dalla funzione generatrice ricaviamo la trsformazione

$$X = xy, \qquad Y = \ln y$$

3) La nuova hamiltoniana sarà

$$K(X,Y) = \frac{X^2}{2} + Y$$

con equazioni del moto

$$\dot{X} = -1, \qquad \dot{Y} = X$$

che hanno soluzione

$$X(t) = X(0) - t, \qquad Y(t) = Y(0) + X(0)t - \frac{t^2}{2}$$

Usando i dati iniziali otteniamo $X(0) = 1,\ Y(0) = 0$ e con la trasformazione inversa otteniamo

$$x(t) = (1-t)e^{-t+\frac{t^2}{2}}, \qquad y(t) = e^{t-\frac{t^2}{2}}.$$

4) L'equazione di Hamilton-Jacobi indipendente dal tempo è:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \ln y = \alpha$$

da cui otteniamo

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\sqrt{2(\alpha - \ln y)}}{y}$$

da cui, usando i dati iniziali otteniamo $\beta(0) = 0,\ \alpha = 1/2$ e

$$t = 1 - \sqrt{1 - 2\ln y}$$

da cui

$$y(t) = e^{t-\frac{t^2}{2}}$$

e

$$x = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\sqrt{(1-2\ln y)}}{y} = (1-t)e^{-t+\frac{t^2}{2}}.$$