**Scritto di Meccanica Analitica 16-9-2014**
E. Scoppola

**Soluzione Esercizio 1**

1) Siano $x_1$, $x_2$ e $\theta$ le variabili lagrangiane, abbiamo $y_1 = 0$ e $y_2 = -ax_2^2$ ed utilizzando il teorema di Koenig abbiamo per l'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(1 + 4a^2x_2^2) + \frac{1}{2}\frac{m_2L^2}{12}\dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale gravitazionale é

$$V_g = -m_2gax_2^2$$

e quella elastica

$$V_{el} = \frac{1}{2}K\Big((x_1 - x_2)^2 + a^2x_2^4\Big)$$

La lagrangiana è dunque:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(1+4a^2x_2^2) + \frac{1}{2}\frac{m_2L^2}{12}\dot{\theta}^2 + m_2gax_2^2 - \frac{1}{2}K\Big((x_1-x_2)^2 + a^2x_2^4\Big) \tag{1}$$

Le equazioni del moto sono:

$$m_1\ddot{x}_1 = -Kx_1 + Kx_2 \tag{2}$$

$$m_2\ddot{x}_2(1 + 4a^2x_2^2) = -4m_2a^2x_2\dot{x}_2^2 + 2m_2gax_2 - K(x_1 - x_2) + 2Ka^2x_2^3 \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m_2L^2}{12}\dot{\theta} = 0 \tag{4}$$

2) La variabile $\theta$ è ciclica e ne deriva $\frac{m_2L^2}{12}\dot{\theta} = p_\theta = cost$ costante. L'energia totale è anche costante poiché il sistema è conservativo. La lagrangiana ridotta risulta essere

$$\mathcal{L}_r = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2(1+4a^2x_2^2) + m_2gax_2^2 - \frac{1}{2}K\Big((x_1-x_2)^2 + a^2x_2^4\Big) \tag{5}$$

3) I punti di equilibrio corrispondono ai punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = K(x_1 - x_2) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = -2m_2gax_2 + Kx_2 - Kx_1 + 2Ka^2x_2^3 = 0 \tag{7}$$

da cui

$$x_1 = x_2 \tag{8}$$

e

$$2ax_2(Kax_2^2 - m_2g) = 0$$

e dunque i punti critici:

$$(0,0) \qquad (\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}) \tag{9}$$

Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(\theta, x) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & -2m_2ga + K + 6Ka^2x_2^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

nei diversi punti critici.

$$V''(0,0) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & -2m_2ga + K \end{pmatrix} \tag{11}$$

che ha determinante negativo dunque il punto $(0,0)$ è instabile.

$$V''(\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}) = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K + 4m_2ga \end{pmatrix} \tag{12}$$

ha determinante e traccia positivi e dunque questi due punti sono stabili.

4) Intorno a ciascuno dei due punti di equilibrio stabile $(\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}})$ la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (x_1, x_2)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_\pm, V''(\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}})(\mathbf{q} - \mathbf{q}_\pm)) \tag{13}$$

con $\mathbf{q}_\pm = (\pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}}, \pm\sqrt{\frac{m_2g}{Ka}})$

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2(1 + \frac{4am_2g}{K}) \end{pmatrix} \tag{14}$$

5) Discutiamo innanzi tutto la periodicitá del problema unidimensionale: se $x_1 = 0$ abbiamo:

$$V = -m_2 g a x_2^2 - \frac{1}{2} K \Big( x_2^2 + a^2 x_2^4 \Big)$$

Dobbiamo distinguere due casi

i) $2m_2 ga > K$

ii) $2m_2 ga \leq K$

Nel caso i) la funzione $V$ ha un massimo in 0 e due minimi in $\pm\sqrt{\frac{2mga-K}{2Ka^2}}$ in questo caso gli unici dati iniziali cui non fa seguito un moto periodico sono quelli per cui l'energia totale é nulla oppure nei due punti di equilibrio $\pm\sqrt{\frac{2mga-K}{2Ka^2}}$ con velocitá iniziale nulla.

Nel caso ii) il potenziale é sempre positivo con unico punto critico in 0 e dunque l'unico dato iniziale cui non fa seguito un moto periodico é quello con energia totale nulla.

Per il problema nel suo complesso, in 2 dimensioni, considerando quindi anche la variabile $\theta$, ai dati iniziali ricavati precedentemente per il problema unidimensionale fa seguito un moto periodico se si prende un dato iniziale $\dot{\theta}(0)$ tale che il periodo del moto di rotazione della sbarra $T_\theta = \frac{2\pi}{\dot{\theta}(0)}$ sia commensurabile col periodo $T$ del problema unidimensionale discusso sopra, cioè $\dot{\theta}(0) = \frac{n}{m}\frac{2\pi}{T}$, con $n, m$ interi. Sono anche periodici i dati iniziali corrispondenti a punti di equilibrio per il problema unidimensionale, per qualunque $\dot{\theta}(0) \neq 0$.

**Soluzione Esercizio 2**

1) Data la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{q}^2 q^4}{2} - \frac{q^3}{3} \tag{15}$$

sia $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q} q^4$ da cui $\dot{q} = \frac{p}{q^4}$ e dunque

$$H = \frac{p^2}{2q^4} + \frac{q^3}{3} \tag{16}$$

Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{2p^2}{q^5} - q^2 \tag{17}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{q^4} \tag{18}$$

2) Abbiamo $Q'(q) = q^2$ da cui otteniamo la trasformazione:

$$P = \frac{p}{Q'(q)} = \frac{p}{q^2} \qquad Q = \frac{q^3}{3} \tag{19}$$

3) La nuova hamiltoniana è:

$$K(P,Q) = \frac{P^2}{2} + Q \tag{20}$$

con equazioni di Hamilton:

$$\dot{P} = -1, \qquad \dot{Q} = P$$

da cui otteniamo per i dati iniziali scelti $P(0) = 0$, $Q(0) = \frac{1}{3}$ le soluzioni

$$P(t) = -t, \qquad Q(t) = \frac{1}{3} - \frac{t^2}{2}$$

Con la trasformazione inversa otteniamo:

$$q(t) = (3Q)^{\frac{1}{3}} = (1 - \frac{3}{2}t^2)^{\frac{1}{3}} \tag{21}$$

$$p(t) = P(3Q)^{\frac{2}{3}} = -t(1 - \frac{3}{2}t^2)^{\frac{2}{3}} \tag{22}$$

4) L'equazione di Hamilton Jacobi indipendente dal tempo è:

$$\frac{1}{2q^4}\Big(\frac{\partial W}{\partial q}\Big)^2 + \frac{q^3}{3} = \alpha$$

da cui

$$W(q,\alpha) = -\int_{q(0)}^{q} \sqrt{2q^4(\alpha - \frac{q^3}{3})}dq$$

dove abbiamo scelto il segno meno per i dati iniziali ($p(0) = 0$ ma $\dot{p}(0) < 0$) ottenendo così

$$t = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = -\int_{q(0)}^{q} \frac{q^2}{\sqrt{2(\frac{1-q^3}{3})}}dq$$

avendo scelto $\beta(0) = 0$ e $\alpha = \frac{1}{3}$ a causa dei dati iniziali. Risolvendo l'integrale ricaviamo

$$t = \sqrt{2(\frac{1-q^3}{3})}$$

da cui

$$q(t) = (1 - \frac{3}{2}t^2)^{\frac{1}{3}}$$

e

$$p(t) = \frac{\partial W}{\partial q} = -t(1 - \frac{3}{2}t^2)^{\frac{2}{3}}.$$