Scritto di Meccanica Analitica del 24-6-2014
E. Scoppola

Soluzione esercizio 1

1) Abbiamo $OC = \sqrt{R^2 - (\frac{l}{2})^2} = \frac{l}{2}$, applicando il teorema di Koenig abbiamo

$$T_{disco} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2\frac{3}{2}$$

avendo usato la condizione di puro rotolamento $r\dot{\phi} = \dot{y}$ e

$$T_{asta} = \frac{1}{2}M\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2\frac{1}{3}$$

e dunque otteniamo la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M\frac{l^2}{3}\dot{\theta}^2 - mgy - Mg\frac{l}{2}\sin\theta - Ky^2 + Kly\sin\theta \tag{1}$$

con equazioni del moto:

$$\frac{3}{2}m\ddot{y} = -mg - 2Ky + Kl\sin\theta \qquad M\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} = -Mg\frac{l}{2}\cos\theta + Kly\cos\theta \tag{2}$$

2) I punti di equilibrio sono i punti critici del potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = mg + 2Ky - Kl\sin\theta = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = (\frac{Mg}{2} - Ky)l\cos\theta = 0$$

Per $\cos\theta = 0$ otteniamo i punti di equilibrio: $(y_1, \theta_1) = (\frac{Kl-mg}{2K}, \frac{\pi}{2})$ e $(y_2, \theta_2) = (-\frac{Kl+mg}{2K}, \frac{3\pi}{2})$. Se $\lambda := \frac{(m+M)g}{Kl} < 1$ abbiamo anche i punti $(y_{3,4}, \theta_{3,4}) = (\frac{Mg}{2K}, \arcsin\lambda)$.
Per studiare la stabilità valuto la matrice delle derivate seconde

$$V''(y,\theta) = \begin{pmatrix} 2K & -Kl\cos\theta \\ -Kl\cos\theta & -l\sin\theta(\frac{Mg}{2} - Ky) \end{pmatrix} \tag{3}$$

nei diversi punti di equilibrio, ottenendo:

$$V''(y_1,\theta_1) = \begin{pmatrix} 2K & 0 \\ 0 & -l(\frac{(m+M)}{2}g - \frac{Kl}{2}) \end{pmatrix}$$

dunque il punto (y_1, θ_1) è stabile se $\lambda < 1$, instabile per $\lambda > 1$.

$$V''(y_2, \theta_2) = \begin{pmatrix} 2K & 0 \\ 0 & l(\frac{(m+M)}{2}g + \frac{Kl}{2}) \end{pmatrix}$$

e dunque (y_2, θ_2) è stabile sempre. Se $\lambda < 1$ otteniamo:

$$V''(y_{3,4}, \theta_{3,4}) = \begin{pmatrix} 2K & -Kl\cos\theta_{3,4} \\ -Kl\cos\theta_{3,4} & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque i punti $(y_{3,4}, \theta_{3,4})$ sono instabili. Per continuità nel caso $\lambda = 1$, il punto (y_1, θ_1) è instabile

3) Intorno al punto di equilibrio stabile $(y_2, \theta_2) =: \mathbf{q_0}$, la lagrangiana delle piccole oscillazioni espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (y, \theta)$ è data da:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\Big((\mathbf{q} - \mathbf{q_0}), V''(\mathbf{q_0})(\mathbf{q} - \mathbf{q_0})\Big) \tag{4}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{3} \end{pmatrix}$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(y_2, \theta_2) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} 2K - \omega^2\frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & l(\frac{(m+M)}{2}g + \frac{Kl}{2}) - \omega^2\frac{Ml^2}{3} \end{vmatrix}$$

da cui $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{K}{3m}}$ e $\omega_0 = \sqrt{3\frac{(m+M)g+Kl}{2Ml}}$.

4) La nuova lagrangiana nel sistema di riferimento solidale con Π e':

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - V_{centr} \tag{5}$$

con $V_{centr} = -\frac{1}{2}M\omega^2\frac{l^2}{6}\cos^2\theta$. I nuovi punti di equilibrio si ottengono dalle equazioni:

$$mg + 2Ky - Kl\sin\theta = 0 \qquad [Mg\frac{l}{2} - Kyl + M\omega^2\frac{l^2}{6}\sin\theta]\cos\theta = 0$$

Per $\cos\theta = 0$ otteniamo gli stessi punti (y_1, θ_1) e (y_2, θ_2) di prima. Se $\lambda' := \frac{(m+M)g}{Kl - \omega^2 M\frac{l}{3}} < 1$ abbiamo anche i due punti: $(\lambda'\frac{l}{2} - \frac{mg}{2K}, \arcsin\lambda')$.

Soluzione esercizio 2

1) Abbiamo $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 2\frac{\dot{q}}{q^2}$ da cui otteniamo $\dot{q} = \frac{pq^2}{2}$ e quindi

$$H(p,q) = \frac{p^2q^2}{4} + \log q \tag{6}$$

2) Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{p^2 q}{2} - \frac{1}{q}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{pq^2}{2}$$

3) La trasformazione canonica generata da F è data da

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{q}$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} = \log q$$

da cui otteniamo la trasformazione

$$P(p,q) = pq \quad Q(p,q) = \log q \tag{7}$$

4) La nuova hamiltoniana è data da $K(P,Q) = \frac{P^2}{4} + Q$ e le nuove equazioni del moto sono:

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -1$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \frac{P}{2}$$

da cui otteniamo

$$P(t) = P(0) - t, \quad Q(t) = Q(0) + \frac{P(0)t}{2} - \frac{t^2}{4}$$

con dati iniziali $Q(0) = \log 1 = 0$, $P(0) = 0$ da cui otteniamo

$$q(t) = e^{-\frac{t^2}{4}}, \quad p(t) = -te^{\frac{t^2}{4}} \tag{8}$$

5) L'equazione di Hamilton-Jacobi è data da:

$$\frac{q^2}{4}\Big(\frac{\partial W}{\partial q}\Big)^2 + \log q = \alpha \tag{9}$$

da cui otteniamo

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm\frac{2}{q}\sqrt{\alpha - \log q}$$

e dunque

$$\beta(0) + t = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \pm\int_1^q \frac{1}{q'\sqrt{(\alpha - \log q')}}dq'$$

Dai dati iniziali abbiamo $\alpha = 0 = \beta(0)$ e $q(t) \leq 1$, $p(t) \leq 0$, e quindi, con il cambiamento di variabile $y = -\log q'$, otteniamo

$$t = \int_0^{-\log q} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{-\log q} \qquad \text{e} \qquad p(t) = \frac{\partial W}{\partial q} = -2\frac{\sqrt{-\log q}}{q}$$

e dunque le equazioni (8).