Soluzione dello scritto di Meccanica Analitica del 3-2-15

E. Scoppola

Esercizio 1

1) Per il centro C del disco abbiamo:

$$x_C = R, \qquad y_C = y$$

e per il centro G dell'asta

$$x_G = R + R\cos\theta, \qquad y_G = y - R\sin\theta$$

da cui, applicando il teorema di König ed utilizzando la condizione di rotolamento

$$\dot{y} = R\dot{\phi} \text{ da cui } \dot{\phi} = \frac{\dot{y}}{R}$$

otteniamo per il disco:

$$T_{disco} = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M\dot{y}^2$$

e per l'asta

$$T_{AB} = \frac{1}{2}m\big[R^2\dot{\theta}^2+\dot{y}^2-2\dot{y}\dot{\theta}R\cos\theta\big]+\frac{1}{2}\frac{mR^2}{3}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\big[\frac{4}{3}R^2\dot{\theta}^2+\dot{y}^2-2\dot{y}\dot{\theta}R\cos\theta\big]$$

Per l'energia potenziale abbiamo

$$V_g = (M+m)gy - mgR\sin\theta, \qquad V_{el} = \frac{1}{2}K(y-2R\sin\theta)^2$$

da cui

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}m\big[\frac{4}{3}R^2\dot{\theta}^2+\dot{y}^2-2\dot{y}\dot{\theta}R\cos\theta\big]-(M+m)gy+mgR\sin\theta-\frac{1}{2}K(y-2R\sin\theta)^2$$

con equazioni del moto

$$(\frac{3}{2}M+m)\ddot{y} - mR\ddot{\theta}\cos\theta + mR\dot{\theta}^2\sin\theta = -(M+m)g - K(y-2R\sin\theta)$$

$$\frac{4}{3}mR^2\ddot{\theta} - mR\ddot{y}\cos\theta = mgR\cos\theta + 2KR\cos\theta(y-2R\sin\theta)$$

2) I punti di equilibrio sono i punti nello spazio delle fasi che corrispondono ai punti critici del potenziale con velocità nulla. Per trovare i punti critici poniamo:

$$\frac{\partial V(y,\theta)}{\partial y} = (M+m)g + Ky - 2KR\sin\theta = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial V(y,\theta)}{\partial \theta} = R\cos\theta\Big[-mg + 4KR\sin\theta - 2Ky\Big] = 0 \tag{2}$$

Poiché quando è verificata l'equazione (**??**) la parentesi quadra in (**??**) è sempre positiva e vale $(2M+m)g$, abbiamo solo da considerare gli zeri del coseno e usando la relazione $y = 2R\sin\theta - \frac{(M+m)g}{K}$ otteniamo i punti critici:

$$(y_1,\theta_1) = (2R - \frac{(M+m)g}{K}, \frac{\pi}{2}), \qquad (y_2,\theta_2) = (-2R - \frac{(M+m)g}{K}, \frac{3\pi}{2}).$$

Per studiare la stabilità basta valutare la matrice delle derivate seconde per determinare se questi punti critici sono massimi o minimi del potenziale:

$$V''(y,\theta) = \begin{pmatrix} K & -2KR\cos\theta \\ -2KR\cos\theta & -R\sin\theta\Big[-mg + 4KR\sin\theta - 2Ky\Big] + 4KR^2\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

Otteniamo per (y_1,θ_1)

$$V''(y_1,\theta_1) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -Rg(2M+m) \end{pmatrix}$$

e dunque $(y_1,\theta_1,0,0)$ è instabile. Per (y_2,θ_2) abbiamo:

$$V''(y_2,\theta_2) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & Rg(2M+m) \end{pmatrix}$$

e dunque $(y_2,\theta_2,0,0)$ è stabile.

3) Intorno al punto (y_2,θ_2) abbiamo la lagrangiana delle piccole oscillazioni, espressa in termini delle variabili $\mathbf{q} := (y,\theta)$:

$$\mathcal{L}_{po} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}, A\dot{\mathbf{q}}) - \frac{1}{2}\Big((\mathbf{q}-\mathbf{q_0}), V''(\mathbf{q_0})(\mathbf{q}-\mathbf{q_0})\Big) \tag{3}$$

con $\mathbf{q_0} = (y_2,\theta_2)$ ed

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M + m & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}mR^2 \end{pmatrix}$$

Le pulsazioni proprie risultano determinate dall'equazione:

$$\det(V''(y_2,\theta_2) - \omega^2 A) = 0 = \begin{vmatrix} K - \omega^2(\frac{3}{2}M+m) & 0 \\ 0 & Rg(2M+m) - \omega^2\frac{4}{3}mR^2 \end{vmatrix}$$

da cui $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{\frac{3}{2}M+m}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{3g(2M+m)}{4mR}}$ e dunque periodi

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}M+m}{K}}, \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{4mR}{3g(2M+m)}}$$

.

4) La lagrangiana nel sistema di riferimento in rotazione si ottiene dalla lagrangiana trovata al punto 1) sottraendo il potenziale centrifugo:

$$\mathcal{L}_K = \mathcal{L} - V_{centr,disco} - V_{centr,AB}.$$

Per il disco abbiamo $V_{centr,disco}$ costante, infatti

$$V_{centr,disco} = -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} r d\phi (R + r\cos\phi)^2$$

che non dipende dalle variabili lagrangiane y e θ. Per l'asta abbiamo

$$V_{centr,AB} = -\frac{1}{2}\omega^2 \frac{m}{2R} \int_0^{2R} ds (R+s\cos\theta)^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 m R^2 \left[\frac{4}{3}\cos^2\theta + 2\cos\theta\right] + cost$$

Esercizio 2

i) Per verificare che il sistema è hamiltoniano e determinare l'hamiltoniana basta imporre

$$\dot{p} = -p^2(q+1) - \frac{1}{q+1} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

da cui $H(p,q) = \frac{p^2}{2}(q+1)^2 + \ln(q+1) + h(p)$, e

$$\dot{q} = p(q+1)^2 = \frac{\partial H}{\partial p}$$

da cui

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2}(q+1)^2 + \ln(q+1).$$

Per ricavare la lagrangiana basta fare la trasformata di Legendre rispetto alla variabile p:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p(q+1)^2 \quad \Longrightarrow p = \frac{\dot{q}}{(q+1)^2}$$

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^2}{2(q+1)^2} - \ln(q+1).$$

ii) La trasformazione $Q = \ln(q+1)$ può essere completata in modo canonico con

$$P = p[Q']^{-1} = p(q+1)$$

iii) Nelle nuove variabili l'hamiltoniana diventa

$$K(P,Q) = \frac{P^2}{2} + Q$$

e le soluzioni delle equazioni di Hamilton sono banalmente

$$Q(t) = Q(0) + P(0)t - \frac{t^2}{2}, \qquad P(t) = P(0) - t$$

con dati iniziali $P(0) = 0$, $Q(0) = \ln 2$ che poste nella trasformazione inversa forniscono le soluzioni:

$$q(t) = e^{Q(t)} - 1 = 2e^{-\frac{t^2}{2}} - 1, \quad p(t) = P(t)e^{-Q(t)} = -\frac{t}{2}e^{\frac{t^2}{2}}$$

iv) L'hamiltoniana non dipende dal tempo per cui l'equazione di Hamilton-Jacobi può essere scritta:

$$\frac{(q+1)^2}{2}\Big(\frac{\partial W}{\partial q}\Big)^2 + \ln(q+1) = \alpha$$

da cui

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{\frac{2}{(q+1)^2}(\alpha - \ln(q+1)}$$

e

$$\beta = \beta(0) + t = \pm\int_{q(0)}^{q} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dq'}{(q'+1)\sqrt{\alpha - \ln(q'+1)}} = \pm\sqrt{2}\sqrt{\alpha - \ln(q+1)}$$

dai dati iniziali otteniamo $\alpha = \ln 2$, $p = \frac{\partial W}{\partial q} < 0$ e $\beta(0) = 0$ da cui

$$q(t) = 2e^{-\frac{t^2}{2}} - 1, \quad p(t) = -\frac{t}{2}e^{\frac{t^2}{2}}$$

come al punto iii).