II Esonero di Meccanica Analitica del 4-6-2014

E. Scoppola

Soluzione

1) Abbiamo $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{2} e^{-q}$ da cui otteniamo $\dot{q} = 2pe^{q}$ e quindi

$$H(p,q) = p^2 e^q \tag{1}$$

2) Le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -p^2 e^q$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2pe^q$$

3) La trasformazione canonica generata da F è data da

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P^2}{2} e^{-\frac{q}{2}}$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} = -2Pe^{-\frac{q}{2}}$$

da cui otteniamo la trasformazione

$$P(p,q) = \pm\sqrt{2p}\, e^{\frac{q}{4}} \quad Q(p,q) = \mp 2\sqrt{2p}\, e^{-\frac{q}{4}} \tag{2}$$

4) La nuova hamiltoniana è data da $K(P,Q) = \frac{P^4}{4}$ e le nuove equazioni del moto sono:

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0$$

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = P^3$$

da cui otteniamo

$$P(t) = P(0) = \pm\sqrt{2}$$
$$Q(t) = Q(0) + P(0)^3 t = \pm 2\sqrt{2}(-1+t)$$

da cui otteniamo

$$e^{-\frac{q(t)}{2}} = 1 - t$$

cioè

$$q(t) = -2\ln(1-t), \quad p(t) = 1 - t \tag{3}$$

5) L'equazione di Hamilton-Jacobi è data da:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 e^q = \alpha \tag{4}$$

da cui otteniamo

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{\alpha}e^{-\frac{q}{2}}$$

e dunque, scegliendo il segno + a causa del dato iniziale $p(0) = 1$,

$$W(q, \alpha) = -2\sqrt{\alpha}e^{-\frac{q}{2}}$$

$$\beta(0) + t = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = -e^{-\frac{q}{2}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Dai dati iniziali abbiamo $\alpha = 1$ e $\beta(0) = -1$ e dunque le equazioni (3).