Primi passi sulle curve algebriche

Lucia Caporaso

Dipartimento di Matematica e Fisica - Università Roma Tre
Largo San Leonardo Murialdo 1 - 00146 Roma, ITALY

caporaso@mat.uniroma3.it

1 Da algebra e geometria alla geometria algebrica

Fin dai primi anni di scuola la matematica viene suddivisa tra algebra e geometria: un giorno numeri e tabelline, un altro rette e poligoni; nell'ora di algebra polinomi ed equazioni, in quella di geometria perimetri e assiomi euclidei. All'università aumentano i settori ma resta la separazione: alle lezioni di algebra e di geometria si aggiungono quelle dell'analisi matematica nelle sue varie forme, ma ogni corso di lezioni è ben distinto dagli altri, con i suoi docenti e i suoi esami. Nell'università italiana la divisioni in settori è presente perfino a livello di qualifica professionale: il tale è professore di algebra, la tale (come chi scrive) di geometria, il tale di analisi matematica, e così via.

Racconto tutto ciò non per discuterne il merito ma per sottolineare quanto, nella nostra cultura, sia radicata l'idea della matematica suddivisa in sottodiscipline. Agli occhi dei non esperti le sottodiscipline arrivano ad acquistare autonomia rispetto alla disciplina madre: mi sono trovata spesso a spiegare che la geometria fa parte della matematica, non è cosa diversa dalla matematica.

Da studentessa universitaria scopro quindi con notevole sorpresa che l'algebra, scienza dei numeri e dei polinomi, può generare geometria. Scoperta folgorante quanto casuale leggendo un libro che parla di una disciplina chiamata *geometria algebrica*, i cui oggetti geometrici sono, udite udite, gli insiemi degli zeri di polinomi. Per di più, in questa disciplina i polinomi formano strutture dai nomi poetici - anelli, campi, ideali - che descrivono le proprietà degli oggetti geometrici.

Fino a quel giorno i polinomi erano nella cassetta degli attrezzi, strumenti utili all'occasione per esprimere alcuni principi importanti: il teorema di Pitagora ($a^2 + b^2 = c^2$), le leggi di Newton ($F = ma$) e di Einstein ($E = mc^2$). Per poter usare gli attrezzi occorre manualità, da qui la necessità di praticare centinaia di esercizi di algebra per assorbire la tecnica; esercizi a volte divertenti ma, in fondo, un po' sterili.

Da quel giorno tutto cambia: i polinomi danno vita a entità geometriche misteriose, chiamate *varietà algebriche*, che possiamo visualizzare mentalmente anche se spesso ci vuole tempo: le intravediamo prima nell'oscurità e ne subiamo il fascino, ci sforziamo a lungo per metterle a fuoco fino a vederle con chiarezza e poterci godere lo spettacolo.

Oltre a farmene ammaliare, imparo anche che la geometria algebrica è una disciplina di formidabile importanza, nonostante la sua giovane età. In poco meno di un secolo è stata protagonista di importanti conquiste scientifiche e in Italia, negli anni '80, è un settore di punta con una tradizione tra le più importanti al mondo.

2 Verso le curve algebriche

Studiando matematica a Roma, nell'edificio intitolato ad uno dei padri della geometria algebrica, Guido Castelnuovo (1865-1952), mi scopro quindi nel posto giusto per cominciare, in tutta umiltà, a studiare le varietà algebriche più piccole: le *curve* algebriche, piccole perché di piccola dimensione. La parola "curva" indica che la loro dimensione è uguale a 1, possiamo pensare alle curve come all'analogo di rette e poligoni in geometria euclidea.

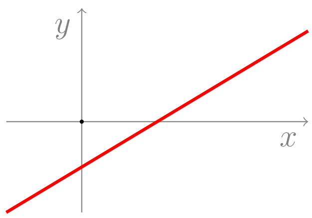
Nonostante siano piccole, le curve algebriche sono materia di studio piuttosto avanzato poiché richiede l'uso simultaneo di strumenti matematici eterogenei, argomenti di numerosi corsi nella laurea in matematica: non soltanto algebra e geometria, ma anche molta analisi matematica. Dunque per capire cos'è una curva algebrica procederemo per passi.

Per quanto detto, le varietà algebriche, e quindi le curve, sono definite da polinomi; in che modo? Partiamo da un caso familiare: le rette nel piano cartesiano reale, $\mathbb{R}^2$, con le coordinate x e y. Ogni polinomio in x e y di grado 1 ha come luogo degli zeri una retta. Consideriamo per esempio l'equazione

$$x - 2y - 3 = 0.$$

Il luogo dei punti dove l'equazione è soddisfatta, ossia l'insieme degli zeri del polinomio $x - 2y - 3$, è una retta che possiamo raffigurare:

$x - 2y - 3 = 0$



Possiamo generalizzare questa costruzione a polinomi di grado maggiore di 1: se $p(x, y)$ è un tale polinomio, allora le soluzioni dell'equazione

$$p(x, y) = 0$$

formano un sottinsieme del piano cartesiano che vorremmo fosse una curva algebrica. Ma sorge immediatamente un problema: l'equazione potrebbe non avere soluzioni! Per esempio l'equazione

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

non è mai soddisfatta al variare del punto (x, y) in $\mathbb{R}^2$ (poiché il quadrato di un numero reale non è mai negativo); dunque l'insieme delle sue soluzioni, essendo vuoto, non può essere una curva.

Naturalmente esistono anche polinomi di grado maggiore di 1 per i quali la nostra equazione ammette soluzioni; ad esempio il polinomio

$$p(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

ha come insieme degli zeri una circonferenza di centro il punto $(0,0)$ e raggio 1. Ma siamo comunque in un vicolo cieco poiché l'esistenza di soluzioni, e con essa la possibilità di definire un oggetto geometrico, dipende in modo decisamente imprevedibile dalla scelta del polinomio.

3 Dai numeri reali ai numeri complessi

Il passaggio fondamentale per sviluppare una vera teoria - diversa da una mera analisi sistematica - è quello di sostituire il piano cartesiano, $\mathbb{R}^2$, con quello complesso, $\mathbb{C}^2$. Ossia estendere l'insieme dei numeri di riferimento, $\mathbb{R}$, all'insieme dei numeri complessi, $\mathbb{C}$, la *chiusura algebrica* di $\mathbb{R}$. Come vedremo, ogni equazione polinomiale ammette soluzioni in $\mathbb{C}$.

Dal punto di vista teorico, il passaggio da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ è straordinario nella sua semplicità, fra le più belle rivelazioni all'inizio degli studi in matematica. In breve: sappiamo che alcune equazioni polinomiali non hanno soluzioni in $\mathbb{R}$, l'esempio tipico è l'equazione $x^2+1=0$, infatti il quadrato di un numero reale non è mai uguale a -1. Dunque creiamo un numero nuovo che sia soluzione di questa equazione e, poiché tale numero non è reale, seguendo Cartesio (René Descartes, 1596-1650) lo chiamiamo, poeticamente, *immaginario* e lo denotiamo "i". Per come abbiamo definito il numero i, abbiamo $i^2+1=0$, quindi $i^2=-1$, dunque il quadrato di i è un numero reale.

Ora consideriamo l'insieme $\mathbb{R}\cup\{i\}$ e aggiungiamoci i risultati di tutte le operazioni elementari (addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni) tra i e i numeri reali. L'insieme ottenuto dalla saturazione di questa procedura è l'insieme dei numeri complessi, $\mathbb{C}$, costituito da tutte le espressioni della forma $a+ib$ per ogni a e b in $\mathbb{R}$; quindi $\mathbb{C}$ è in biezione con $\mathbb{R}^2$.

Ora, $\mathbb{C}$ è un vero fenomeno poiché ogni equazione polinomiale a coefficienti in $\mathbb{C}$ ammette soluzioni in $\mathbb{C}$. Quindi ogni polinomio (di grado positivo) in due variabili definisce una vera curva in $\mathbb{C}^2$.

Geometricamente il passaggio da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ è un po' drammatico poiché perdiamo la possibilità di disegnare le nostre curve - vederle in $\mathbb{R}^2$ era di grande aiuto! Purtroppo, per $\mathbb{C}^2$ non esiste alcuna rappresentazione visiva, poiché $\mathbb{C}^2$ è in biezione con $\mathbb{R}^4$ che è innegabilmente troppo grande da disegnare per chi, come noi, vive in uno spazio reale a tre dimensioni.

Da ora in poi dovremo quindi immaginare le curve algebriche, visualizzarle mentalmente in analogia con la geometria che conosciamo. Ma questa è anche una sfida esaltante con la quale i matematici sanno misurarsi. Se c'è chi compone brani musicali senza poterli ascoltare, o interi romanzi senza poterli leggere, c'è anche chi costruisce e studia oggetti geometrici senza poterli vedere.

4 Dal piano complesso al piano proiettivo

In geometria algebrica si effettua un ulteriore importante passaggio, consistente anch'esso in un'estensione: il piano complesso, $\mathbb{C}^2$, viene esteso al *piano proiettivo*, che denotiamo $\mathbb{P}^2$, ottenuto aggiungendo a $\mathbb{C}^2$ una nuova retta; la lettera $\mathbb{P}$ sta per "proiettivo", e il 2 indica che si tratta di un piano, ossia ha dimensione uguale a 2.

In realtà l'idea del passaggio al piano proiettivo è più antica della geometria algebrica, la cui origine si colloca alla fine del 1800. Il piano proiettivo fu ideato nel 1600, nell'ambito della geometria proiettiva che produsse un modello matematico rigoroso per inquadrare e sviluppare le regole della prospettiva studiate dagli artisti del Rinascimento. Nella geometria proiettiva, con Girard Desargues (1591-1661) tra i suoi pionieri, si prescinde dalle nozioni di parallelismo e distanza, per concentrarsi invece sui punti di fuga, sulle proiezioni - da qui il nome "proiettivo" - e su altri elementi concernenti la visione delle figure. Nel 1600, il piano proiettivo si definisce aggiungendo al piano cartesiano ordinario, $\mathbb{R}^2$, la cosiddetta *retta all'infinito*.

La geometria algebrica trasporta questa costruzione al caso complesso e ne utilizza le tecniche algebriche. La nuova retta che avevamo detto essere aggiunta a $\mathbb{C}^2$ è l'analogo della retta all'infinito. Però in geometria algebrica questa retta cessa immediatamente di avere un ruolo speciale ed è trattata esattamente alla stessa stregua di tutte le altre rette.

L'estensione di $\mathbb{C}^2$ al piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ comporta una serie di importanti vantaggi. Uno di questi è il fatto che $\mathbb{P}^2$ consiste in un *completamento* di $\mathbb{C}^2$; spiegheremo in seguito cosa si intende per "completamento". Per il momento menzioniamo solo il fatto che, come suggerisce il termine stesso, lo spazio $\mathbb{C}^2$ è incompleto, gli manca qualcosa, e tale lacuna viene colmata dall'aggiunta della retta all'infinito e dal passaggio a $\mathbb{P}^2$.

Anche dal punto di vista algebrico l'estensione al piano proiettivo ha un pregio considerevole, pur se non evidente: da ora in poi i polinomi che considereremo saranno soltanto quelli *omogenei*, ossia somme di monomi tutti dello stesso grado. Il prezzo da pagare per questa semplificazione è l'aggiunta di una nuova coordinata: mentre in $\mathbb{C}^2$ avevamo solo le coordinate x e y, in $\mathbb{P}^2$ ne abbiamo tre, denotate X, Y e Z. L'aggiunta di una terza coordinata non aumenta la dimensione da due a tre poiché le nuove coordinate sono omogenee, ossia determinate a meno di una costante moltiplicativa: il punto non cambia se si moltiplicano le sue tre coordinate per uno stesso numero diverso da zero, quindi per determinare un punto sono sufficienti due parametri piuttosto che tre.

Le equazioni in $\mathbb{C}^2$ che abbiamo visto prima, $x-2y-3=0$ e $x^2+y^2+1=0$, dove appaiono due polinomi non omogenei in (x, y), corrispondono, rispettivamente, alle equazioni con polinomi omogenei in (X, Y, Z)

$$X - 2Y - 3Z = 0, \qquad \text{e} \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

L'insieme delle soluzioni di ciascuna equazione è una curva algebrica: la prima è una retta, la seconda una curva di grado 2 che adesso (essendo passati da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$) non è vuota; per esempio contiene il punto di coordinate $X = 1, Y = i, Z = 0$.

In generale, se $p(X, Y, Z)$ è un polinomio omogeneo di grado positivo d, il luogo dei punti di $\mathbb{P}^2$ dove l'equazione $p(X, Y, Z) = 0$ è soddisfatta si dice curva algebrica di grado d. Un esempio di curva di grado 4 è il luogo degli zeri dell'equazione

$$X^4 + X^2Y^2 + XYZ^2 + Z^4 = 0.$$

La nuova retta "all'infinito" che avevamo aggiunto a $\mathbb{C}^2$ per ottenere $\mathbb{P}^2$ è quella di equazione $Z = 0$.

Possiamo definire in modo analogo le varietà algebriche in spazi proiettivi di dimensione qualsiasi. Per ogni $r \geq 2$ consideriamo $\mathbb{C}^r$, il prodotto di $\mathbb{C}$ per se stesso r volte, e estendiamolo all'"iper-spazio" proiettivo $\mathbb{P}^r$ aggiungendo una nuova "iper-retta" di dimensione $r-1$; ricordiamo che nel caso $r = 2$ avevamo aggiunto una semplice retta. Consideriamo, in $\mathbb{P}^r$, il luogo degli zeri comuni ad uno o più polinomi omogenei in $r+1$ variabili. Questo insieme è una varietà algebrica per la quale sono definite la dimensione e il grado; se la varietà ha dimensione 1, diciamo che è una curva.

Per completezza, chiarisco che qui usiamo la terminologia "varietà algebrica" al posto della più lunga e precisa "varietà algebrica, proiettiva, complessa".

Torniamo a $\mathbb{P}^2$; sappiamo che l'insieme degli zeri di un polinomio omogeneo (non nullo, in tre variabili) è una curva. Ora, cosa succede se prendiamo non uno, ma due polinomi? Come è fatta la varietà algebrica data, in $\mathbb{P}^2$, dall'insieme degli zeri comuni a due polinomi omogenei in tre variabili? Se i due polinomi non hanno fattori polinomiali comuni, allora questa varietà è un insieme finito di punti, e ha dimensione uguale a zero. Se invece i due polinomi hanno fattori polinomiali comuni, questa varietà è l'unione di un insieme finito di punti con una curva algebrica, e la sua dimensione è uguale a 1.

5 Confronto di curve algebriche

Consideriamo adesso l'insieme di tutte le curve algebriche nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2$. Vogliamo confrontarle tra loro e stabilire quando due di esse hanno le stesse proprietà geometriche, indipendentemente dalle equazioni che le definiscono. In analogia con la geometria euclidea del piano, è come chiedersi quando due triangoli sono congruenti, o sovrapponibili, indipendentemente dalla loro collocazione. Un teorema (per citare uno dei noti criteri euclidei sulla congruenza dei triangoli) stabilisce che se le lunghezze dei lati sono le stesse, allora i triangoli sono congruenti. In geometria algebrica, il termine "congruenti" è sostituito dal termine *isomorfi*.

Vogliamo dunque sapere quando due curve nel piano sono isomorfe, hanno la stessa "forma" anche se corrispondono a equazioni diverse. Iniziamo con lo scoprire che due rette (curve date da polinomi di grado 1) sono sempre isomorfe, il che non ci sorprende affatto. Ma il problema si fa più intrigante quando analizziamo le curve di grado 2: scopriamo che queste sono quasi tutte isomorfe tra loro e, attenzione, sono anche isomorfe alle rette! Più precisamente, affinché una curva di grado 2 sia isomorfa ad una retta basta che il polinomio che la definisce non si spezzi nel prodotto di due polinomi di grado 1. Al crescere del grado il problema si fa sempre più interessante: già in grado 3 scopriamo l'esistenza di infinite curve non isomorfe tra loro e non isomorfe alle rette.

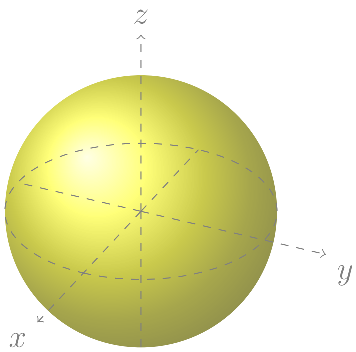
Ma cosa significa, esattamente, che due curve sono isomorfe? Per rispondere è bene introdurre il concetto di curva astratta, altra conquista importante della geometria moderna. Le curve astratte, e più in generale tutte le varietà astratte, sono definite come entità a sé stanti, senza uno spazio ambiente che le contenga; non daremo qui la definizione, che è alquanto articolata e richiederebbe tempo. Per noi è fondamentale sapere che ad ogni varietà algebrica, in qualsiasi spazio proiettivo $\mathbb{P}^r$, corrisponde un'unica varietà astratta, di cui la varietà algebrica in $\mathbb{P}^r$ costituisce un modello "concreto". Viceversa, ogni varietà astratta può essere realizzata concretamente da varietà algebriche in qualche $\mathbb{P}^r$, come luogo degli zeri di un opportuno insieme di polinomi. Tali realizzazioni concrete vengono chiamate *modelli proiettivi*, ne esistono infiniti per ogni varietà astratta e sono anch'essi oggetto di studio.

In questi termini, dire che due curve nel piano sono isomorfe significa dire che sono modelli proiettivi della stessa curva astratta.

Abbiamo detto prima che le rette e le curve di grado 2, ad eccezione di quelle il cui polinomio si spezza, sono tutte isomorfe tra loro; quindi corrispondono alla stessa curva astratta, che viene chiamata curva *razionale*. Come il termine "razionale" suggerisce, questa particolare curva sembra ragionevole, ha delle qualità speciali; quali? Per esempio, ha una struttura omogenea nel senso che due suoi punti qualsiasi sono indistinguibili: se passeggiassimo su una curva razionale come fosse un prato non noteremmo alcuna variazione sotto i nostri piedi, come su un prato inglese piuttosto che su un prato di campagna.

6 Dalle curve algebriche alle superfici reali

Dicevamo che le curve sono le più piccole varietà algebriche; proprio perché sono piccole possiamo visualizzarle in modo concreto. Cominciamo dalla curva razionale, come visualizzarla? La risposta è di una semplicità abbagliante: come una sfera!



Cerchiamo di spiegare in che modo un oggetto bi-dimensionale come la sfera può rappresentare una curva, che ha dimensione 1. La bi-dimensionalità della sfera si riferisce allo spazio reale in cui viviamo. D'altra parte la uno-dimensionalità di una curva è definita rispetto ai numeri complessi. Sappiamo che $\mathbb{C}$ è identificato a $\mathbb{R}^2$, quindi un oggetto di dimensione 1 su $\mathbb{C}$ avrà sempre dimensione 2 su $\mathbb{R}$. In conclusione, le nostre curve algebriche hanno tutte dimensione 2 su $\mathbb{R}$, e quindi non c'è nulla di male a rappresentarle come superfici reali.

Bisogna però essere consapevoli del fatto che questa rappresentazione è in parte arbitraria: per rappresentare una curva razionale potremmo scegliere, al posto di una sfera, un ellissoide o un dirigibile. Non potremmo, invece, scegliere la superficie di una ciambella salvagente per chi non sa, o non vuole, nuotare.

Siamo pronti a descrivere una meravigliosa scoperta di Bernhard Riemann (1826-1866), che permette di associare ad ogni curva astratta una superficie reale più facile da visualizzare e classificare.

Prima di tutto, le superfici reali che ci interessano sono oggetto di un'importante classificazione, nota come *classificazione topologica delle superfici topologiche (compatte, connesse e orientabili)* - ometteremo questi ultimi tre termini per non entrare in dettagli tecnici di cui non abbiamo bisogno. Il termine "topologico" invece merita un commento; la topologia è l'area della geometria che studia le proprietà relative alle deformazioni degli oggetti, indipendentemente dalle loro misure (lunghezza, area,...).

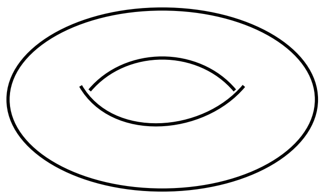
Analizziamo per esempio una sfera dal punto di vista topologico: la lunghezza del suo raggio è assolutamente irrilevante, così come lo sono le sue simmetrie; dal punto di vista topologico una sfera è uguale a un ellissoide

Grazie alla classificazione, possiamo catalogare le nostre superfici topologiche utilizzando tutti i numeri naturali

$$0, 1, 2, \ldots, g-1, g, g+1, \ldots$$

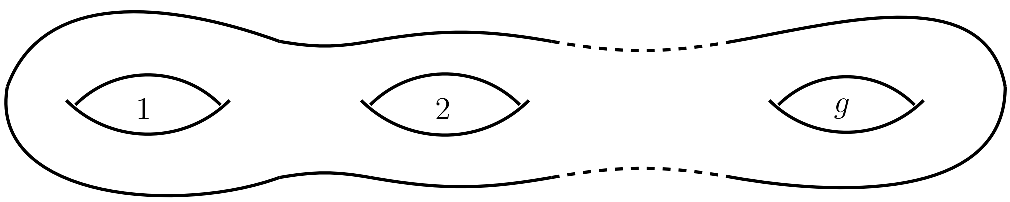
Al numero 0 corrisponde la superficie di una sfera (o quella di un ellissoide o di un dirigibile).

Al numero 1 la superficie di una ciambella salvagente, che rappresentiamo schematicamente



$g = 1$

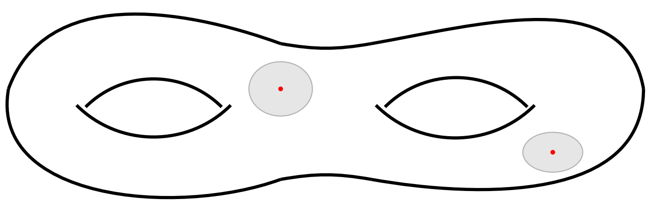
Al numero g corrisponde la superficie di una ciambella che invece di avere un solo buco ne ha esattamente g; può tenere a galla g persone diverse.



$g \geq 3$

Osserviamo - ci sarà utile in seguito - che le superfici appena classificate sono chiamate "topologiche" perché hanno una proprietà fondamentale. Nelle immediate vicinanze di ogni loro punto le superfici, dal punto di vista topologico, sono come $\mathbb{R}^2$. Intuitivamente, osservando una superficie topologica al microscopio vediamo esattamente ciò che vedremmo se stessimo guardando al microscopio il piano $\mathbb{R}^2$. Al microscopio le superfici topologiche sono indistinguibili da $\mathbb{R}^2$, e anche indistinguibili tra loro.

Nella figura seguente vediamo, su una superficie topogica di genere 2, due punti (scelti ad arbitrio) e due regioni che rappresentano l'aspetto della superficie - vista al microscopio - nelle vicinanze dei punti. Le due regioni, essendo molto piccole, sembrano piatte, come se stessero su R^2 piuttosto che su una ciambella rotondeggiante.



7 Genere di una curva algebrica

Il numero di buchi di una ciambella, o superficie reale, si dice *genere*; abbiamo quindi classificato le superfici reali tramite il loro genere. Osserviamo che, così come una sfera e un ellissoide rappresentano, entrambe a pieno titolo, una superficie di genere 0, le dimensioni o le simmetrie non hanno alcuna importanza nella classificazione topologica: l'unica cosa che conta è il genere.

È come classificare l'insieme di tutti i poligoni usando soltanto il numero di lati: abbiamo un tipo di poligono per ogni numero, al 3 corrispondono i triangoli, al 4 i quadrilateri, ecc ecc. Qualsiasi triangolo, isoscele o scaleno, grande o piccolo, appartiene alla classe dei triangoli. In questa analogia, il numero dei lati di un poligono corrisponde al genere di una superficie reale.

Riemann dimostra che per ogni curva algebrica si può definire, in modo univoco e algebrico, un numero naturale, g, tale che la curva sia visualizzabile su una superficie reale di genere g; così ad ogni curva algebrica possiamo associare il suo genere. Scopre anche che per ogni g esistono infinite curve di genere g non isomorfe tra loro, ad eccezione del caso $g = 0$ per il quale esiste solo la curva razionale. Detto altrimenti, su una sfera possiamo definire un'unica struttura di curva astratta, mentre sulle superfici di genere positivo possiamo definirne infinite.

Il prossimo obiettivo è capire come si comportano le curve astratte di genere positivo, g, fissato. Sono infinite e sappiamo, sempre grazie a Riemann, "quanto" infinite: formano un mondo a $3g-3$ dimensioni se g è almeno 2, e ad una dimensione nel caso $g = 1$. Ora, come sono fatti questo mondi?

8 Mondi di curve algebriche: spazi di moduli

Eccoci nel ventesimo secolo, quando cominciamo a capire che i mondi di curve di genere fissato sono, essi stessi, delle varietà algebriche con proprietà affascinanti. Tali varietà, i cui punti corrispondono a curve algebriche astratte, vengono chiamate *spazi di moduli*. Questa speciale terminologia, dovuta a Riemann, si è radicata profondamente e oggi viene usata non solo per i mondi di curve ma anche per i mondi varietà di dimensione qualsiasi. Quindi, con un gioco di parole, possiamo pensare agli spazi di moduli come a "varietà di varietà": varietà algebriche i cui punti rappresentano varietà algebriche, per esempio curve di genere g.

Per ogni genere g, lo spazio dei moduli delle curve di genere g è talmente importante da avere un simbolo tutto suo: si denota M_g, dove la "M" sta per "moduli". Per quanto detto prima, se il genere è 0, lo spazio M_0 è semplicemente un punto che corrisponde all'unica curva razionale; M_0 è quindi ben poco interessante. Invece M_1 ha dimensione uguale a 1 e, se $g \geq 2$, la dimensione di M_g è $3g-3$. All'aumentare di g, la dimensione di M_g aumenta e quindi aumenta la quantità di curve; inoltre la struttura geometrica di M_g, che dipende esclusivamente da g, si fa sempre più interessante.

Lo studio degli spazi di moduli, di curve e di altri tipi di varietà algebriche, è un'area di ricerca in continuo sviluppo, ricca di interazioni con altre discipline, sia in matematica che in fisica. Per molti ricercatori, tra cui la sottoscritta, l'interesse e la passione per questi argomenti sono animati dall'evidenza che la geometria degli spazi di moduli riflette la geometria degli oggetti che essi parametrizzano. Vorrei illustrare questo concetto, limitandomi alle curve, attraverso una metafora.

Le nostre curve astratte sono come le tessere di un puzzle e il loro spazio dei moduli, M_g, è il puzzle finito. Le singole tessere hanno, esse stesse, forme e colori attraenti che dobbiamo esaminare e confrontare tra loro per poter comporre il puzzle. Una volta terminato, il puzzle non è soltanto un bell'oggetto tutto nuovo, ma rivela anche proprietà delle tessere che prima non conoscevamo. Nel collegare le tessere tra loro ne comprendiamo aspetti importanti che, quando erano sparse, non erano visibili.

Per esempio, un'importante proprietà geometrica di M_g è la sua cosiddetta *irriducibilità*, concetto tecnico che equivale ad una forma particolarmente forte di *connessione*. Con la nostra metafora, il puzzle è fatto di un unico "pezzo" che non possiamo suddividere se non rompendolo; date due sue tessere qualsiasi, possiamo passare dall'una all'altra muovendoci lungo il puzzle.

Quindi dati due punti qualsiasi su M_g possiamo passare dall'uno all'altro muovendoci lungo M_g. Ciò significa che date due curve qualsiasi di genere g possiamo trasformare l'una nell'altra passando attraverso altre curve di genere g. Questo fatto non è scontato: a priori le curve di genere g avrebbero potuto ripartirsi in più mondi non comunicanti tra loro. Peraltro, questo è esattamente quello che succede al variare del genere: gli spazi M_g non comunicano tra loro, non è possibile trasformare una curva in una di genere diverso. Ciascun M_g è un puzzle che non ha nulla a che vedere con gli altri.

In sintesi: i punti degli spazi M_g rappresentano tutte le curve (di genere g), e la struttura geometrica di M_g è governata da come le curve si trasformano le une nelle altre.

9 Verso spazi di moduli completi

Intorno alla fine del ventesimo secolo gli spazi di moduli, da oggetti geometrici notevolmente interessanti, diventano strumenti indispensabili nelle applicazioni, ad esempio nel calcolo di quantità numeriche essenziali nella fisica e nella matematica.

In matematica, così come nella vita quotidiana, uno strumento ha bisogno di qualità specifiche per essere applicato efficacemente. Ora, i nostri spazi di moduli sono quasi sempre privi di una qualità nota come *completezza*: sono incompleti. Essi hanno lo stesso difetto che avevamo attribuito a $\mathbb{C}^2$, per correggere il quale, come abbiamo visto, si costruisce il piano proiettivo, $\mathbb{P}^2$.

Cosa significa che uno spazio di moduli non è completo? Il puzzle della nostra metafora, una volta finito, ha delle lacune: è come se le tessere a nostra disposizione, ossia tutte le curve astratte, non permettano di arrivare ad un'immagine completa. E per di più le lacune sono strutturali: le tessere sono fatte in modo da generare un puzzle incompleto. Se il nostro puzzle rappresentasse una carta geografica, è come se mancassero mari, laghi e fiumi perché le tessere sono prive delle tonalità del blu. Questo è un problema: una carta geografica senza corsi d'acqua è alquanto triste e serve a poco.

La questione dell'incompletezza degli spazi di moduli anima molte delle ricerche nel campo. Bisogna trovare le tessere necessarie a riempire le lacune del nostro puzzle, senza rovinarlo. Dal punto di vista matematico, bisogna comprendere le ragioni dell'incompletezza per costruire un completamento utile dal punto di vista concettuale e pratico.

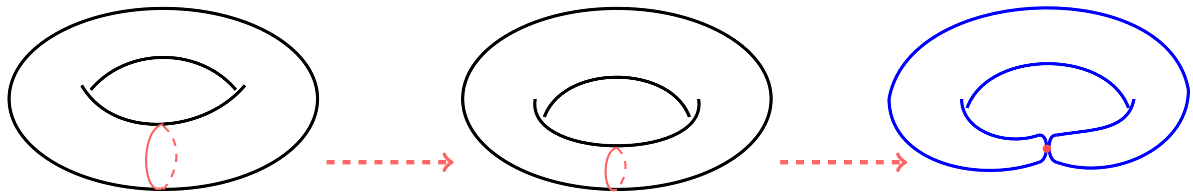
Per quanto riguarda le curve, il motivo per cui lo spazio M_g non è completo (per ogni $g \geq 1$) è che le nostre curve di genere g si trasformano non soltanto in altre curve di genere g (come abbiamo visto), ma anche in varietà algebriche di tipo diverso, chiamate curve *singolari*, che non sono rappresentate da nessun punto di M_g. Quindi le nostre curve, muovendosi lungo M_g, finiscono per scivolarne fuori!

La diversità di tali curve singolari consiste nel fatto di essere definite non più su una superficie topologica di genere g, ma su superfici più complicate che non appaiono nella classificazione topologica.

Nella figura seguente vediamo un esempio, in genere 1, di una trasformazione ottenuta contraendo ad un punto il cappio rosso sulla superficie di sinistra; stiamo qui rappresentando le nostre curve con superfici reali. Ora, la superficie di destra non è una superficie topologica a causa del punto rosso, dove si è contratto il cappio. Infatti, al microscopio, l'aspetto di questa superficie nelle vicinanze del punto rosso è quello di due superfici attaccate tra loro nel punto, che è ben diverso dall'aspetto di $\mathbb{R}^2$. Viene quindi meno la proprietà fondamentale delle superfici topologiche.

Ciononostante, a questa superficie corrisponde una varietà algebrica, chiamata curva singolare. Indubbiamente il punto rosso si distingue da tutti gli altri e in tal senso è un punto singolare; da qui la terminologia "curva singolare".

Dunque lo spazio M_1 non contiene alcun punto che corrisponde alla superficie di destra; d'altra parte le curve di genere 1 la ammettono come limite. Quindi M_1 non è completo e una sua lacuna è rappresentata dalla superficie di destra, che infatti è colorata di blu.



10 Dalle curve algebriche (lisce) alle curve stabili

Riassumendo: per ogni $g \geq 1$ gli spazi di moduli M_g sono incompleti. Per poterli utilizzare dobbiamo completarli, inserendoli dentro spazi un po' più grandi che abbiano le loro stesse virtù con in più la completezza.

Qual è la virtù caratterizzante di M_g? Il fatto che i suoi punti rappresentano curve algebriche, ovvero il fatto di essere uno spazio di moduli per un certo tipo di varietà. Per completarlo dobbiamo quindi estendere l'insieme delle curve algebriche ad un insieme di varietà il cui spazio dei moduli sia completo. Per quanto illustrato sopra, è naturale ipotizzare che le varietà da aggiungere siano curve singolari; confermeremo tra poco questa ipotesi.

Vogliamo adesso notare che la questione della non completezza è molto diffusa, non riguarda soltanto le curve. Quasi tutti i tipi di varietà algebriche studiati fino ad oggi formano spazi di moduli incompleti, ed è necessario estendere opportunamente il tipo di varietà in esame affinché il loro spazio di moduli sia, appunto, completo. In molti casi siamo ancora lontani dall'aver risolto il problema.

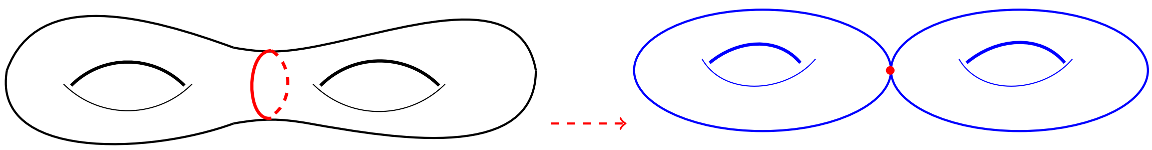
La costruzione di opportune estensioni di insiemi ben noti è una tipologia di problemi universalmente presente in matematica. Ne abbiamo qui visto un altro nobile esempio: l'insieme dei numeri reali non è sufficiente affinché ogni equazione polinomiale ammetta soluzioni, cosí si arriva a inventare i numeri complessi, estendendo $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Ecco una conquista, di prodigioso impatto sull'evoluzione della matematica, che non va sottostimata dal punto di vista storico: se l'idea di numero reale era già sostanzialmente nota a Euclide, nel IV-III secolo a.c., i numeri complessi compaiono nel 1500, nell'opera di matematici italiani tra cui Gerolamo Cardano (1501-1576) e Niccolò Tartaglia (1499-1557) e, come altre conquiste scientifiche, ha dovuto a lungo resistere all'accusa di eresia.

Per fortuna, o per sfortuna, la geometria algebrica contemporanea non minaccia, almeno per ora, di abbattere pilastri socio-culturali, e noi possiamo lavorare tranquillamente a completare gli spazi di moduli di interesse. La quantità e rilevanza di questioni irrisolte e i progressi degli ultimi anni, fanno di quest'area di ricerca una delle più vivaci ed entusiasmanti di oggi, dove il caso delle curve algebriche ha fatto da apripista anche per le varietà di dimensione maggiore.

Infatti, nella seconda metà del ventesimo secolo, il problema del completamento degli spazi di moduli M_g è stato risolto; vediamo in che modo. L'insieme delle curve algebriche trattate finora - studiate da Riemann - è stato esteso ad un insieme un po' più grande, noto come l'insieme delle curve *stabili* che, come abbiamo anticipato, contiene anche curve singolari.

Una curva stabile non singolare, che corrisponde ad un punto di M_g (o ad una tessera del puzzle priva del blu), viene ora chiamata, non senza poesia, curva *liscia*. Dunque le curve studiate da Riemann sono lisce. Le tessere nuove del puzzle - quelle colorate di blu - sono le curve stabili singolari, che possiamo visualizzare incollando tra loro, in uno o più punti, le superfici topologiche che rappresentavano le curve originali.

Nella figura seguente, a destra, opportunamente colorato in blu, abbiamo un esempio in genere 2, ottenuto, dalla contrazione di un cappio su una curva liscia rappresentata dalla superficie di sinistra.



La terminologia curva "stabile" indica la completezza del loro spazio dei moduli: uno spazio completo non ha lacune, quindi è stabile in quanto non ha bisogno di aggiunte o modifiche.

Le curve stabili, che qui non definiremo con precisione, appaiono e vengono utilizzate per la prima volta in un articolo pionieristico del 1969 di Pierre Deligne (1944) e David Mumford (1937); il loro spazio dei moduli si è rivelato, nel corso degli anni, un campione di eleganza ed efficienza.

11 Primi passi nella ricerca

L'introduzione delle curve stabili e la costruzione del loro spazio di moduli ha portato alla soluzione di problemi significativi ed ha aperto nuove aree da esplorare, viene quindi annoverata tra le più importanti scoperte della geometria del secolo scorso. Anche la sottoscritta è cresciuta matematicamente grazie a loro, cominciando dalla tesi di laurea a Roma e proseguendo nel dottorato a Boston negli Stati Uniti, quasi senza interruzione nonostante la traversata atlantica.

Conservo un ricordo molto vivido del primo incontro con il mio direttore di dottorato, il professor Joe Harris (1941) della Harvard University, tra i principali esperti mondiali di geometria algebrica e di curve algebriche. Forse preoccupata per la vastità dei suoi interessi scientifici, per tener fede ai miei interessi gli dissi subito, forse un po' brutalmente: "I want to work on moduli spaces" (*Voglio lavorare sugli spazi di moduli*). Così è stato ed è andata bene: con la sua guida e forte della formazione italiana - che mi è stata immensamente preziosa - ho potuto dedicare la mia tesi di Ph.D. a costruire il completamento di una certa collezione di spazi di moduli. Quale?

Spiegavo prima che ogni curva astratta ammette modelli in spazi proiettivi, questo vale sia per le curve lisce che per quelle singolari. I modelli proiettivi di tutte le curve lisce diventano anch'essi tessere di un puzzle, e formano anch'essi spazi di moduli non completi. Questi sono gli spazi di moduli che ho completato, utilizzando un'ulteriore estensione del concetto di curva stabile a cui ho dato il nome, non molto poetico, di "curva quasistabile bilanciata".

Potrei quindi dire che ho mosso i primi passi nella ricerca lavorando ad un puzzle sulle curve algebriche. Sono passati trent'anni ma le emozioni e le fatiche di oggi sono molto simili a quelle di allora, in autonomia e in collaborazione: l'entusiasmo per una nuova idea e il timore che non funzioni, la pazienza di farla maturare e prendere forma, il controllo ripetuto di ragionamento e calcoli, la verifica su ulteriori esempi per essere certi che la soluzione sia, davvero, tale.

D'altronde nella ricerca in matematica non esistono risposte a fondo pagina o a fine testo dove verificare che il lavoro svolto sia corretto. Esiste il confronto aperto con la comunità scientifica e l'inserimento, nel suo patrimonio in continua evoluzione, del nostro contributo. E più saremo fortunati, più il nostro contributo, da originale e innovativo che era, col passare del tempo diventerà acquisito e scontato.

Riferimenti bibliografici

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Volume I.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. **267** Springer, Heidelberg (1984).

[2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths. *Geometry of algebraic curves. Volume II.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. **268** Springer, Heidelberg (2011).

[3] L. Caporaso. *A compactification of the universal Picard variety over the moduli space of stable curves.* Journ. of the Amer. Math. Soc., 7, (1994): 589-660.

[4] P. Deligne, D. Mumford: *The irreducibility of the space of curves of given genus.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No 36 (1969) 75-120.

[5] D.Gieseker. *Lectures on moduli of curves.* TIFR Lecture Notes 69 (1982) Springer.