AC10 - Analisi Complessa

Scritto B
15 febbraio 2011

COGNOME e NOME e numero matricola:

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 1. Si identifichi $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ nel modo usuale.

Si dimostri o si confuti il seguente enunciato.

Sia $f(x, y)$ una funzione continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ tale che

$$f(i) = f(-i) \quad \text{e} \quad f(1) = -f(-1).$$

Se f ammette le derivate parziali prime continue (ossia se f è di classe C^1) allora f è olomorfa.

Problema 2. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ la regione

$$\Omega := \{x + iy : |x| < 1, |y| < 1\}.$$

Si dimostri o si confuti il seguente enunciato.

È possibile mandare in modo conforme il piano complesso suriettivamente su Ω (Equivalentemente: esiste un'applicazione conforme e suriettiva $f : \mathbb{C} \longrightarrow \Omega$).

Problema 3. Sia $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$. Per quali valori di k la funzione

$$f(z) = z^k + \cos z$$

ammette k zeri nel disco di centro 0 e raggio ρ?

Problema 4. Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{\cos t - \sqrt{5}}.$$

Problema 5. Dimostrare che

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}.$$

Si dica se la convergenza del prodotto suddetto è uniforme o meno, giustificando la risposta.