AC10 - Analisi Complessa

Esonero 1
5 Novembre 2010

COGNOME e NOME e numero matricola:

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 1. *Questo problema (elementare) va svolto utilizzando soltanto la definizione di derivata.*

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa e mai nulla nella regione $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(1) Si dimostri che la funzione $\frac{1}{f(z)}$ è olomorfa in Ω calcolando la formula per la sua derivata.

(2) Sia $f(z) = z^n$ e $\Omega = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ la funzione è olomorfa in Ω calcolando la formula per la sua derivata.

Problema 2. Determinare tutte le trasformazioni lineari fratte che scambiano tra loro la circonferenza unitaria $S^1 := \{z : |z| = 1\}$ con la retta immaginaria $Y := \{z : z = iy,\ \forall y \in \mathbb{R}\}$.

Problema 3. Si dica se ciascuno degli aperti $A_i \subset \mathbb{C}$ seguenti può essere trasformato in modo conforme sul disco unitario. In caso positivo si esibisca la trasformazione conforme, in caso negativo si motivi la risposta.

(1) $A_0 = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$.

(2) $A_1 = \{z : 0 < \mathrm{Im} z < 2\pi\}$.

(3) $A_2 = \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ (il piano complesso senza la semiretta reale non-negativa).

(4) $A_3 = \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ (il piano complesso senza la retta reale).

(5) $A_4 = \mathbb{C}$.

Problema 4. Vero o falso? *Giustificare la risposta*

(1) Sia $f(z)$ olomorfa in $\mathbb{C}$. Se esistono $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $\rho \in \mathbb{R}$ tali che se $|z| > \rho$ si abbia
$$|f(z)| < |a + bz^n|,$$
allora $f(z)$ è un polinomio di grado al più uguale a n.

(2) Sia $f(z)$ olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se esistono numeri reali M e ρ tali che se $|z| > \rho$ si abbia
$$|f(z)| < M,$$
allora $f(z)$ è costante.

Problema 5. Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-2)^3}$$

dove γ è

(1) il cerchio $\{z : |z| = 1\}$ percorso una volta in senso orario;
(2) il cerchio $\{z : |z-1| = 3\}$ percorso una volta in senso orario.